

GLMA401
Polycopié Algèbre linéaire 4
2013-2014

Responsable : Pierre-Louis Montagard

pierre-louis.montagard@umontpellier.fr

Ce document commence par un rappel du cours de première année d'algèbre ; ce rappel est extrait du polycopié rédigé par Nicolas Ressayre que je remercie. Les résultats de ce rappel sont énoncés sans preuve.

Table des matières

| | |
|--|----|
| Chapitre 0. Rappels sur les matrices et applications linéaires | 5 |
| 1. Les matrices | 5 |
| 2. Applications linéaires | 8 |
| Chapitre 1. Dualité | 15 |
| 1. Définitions | 15 |
| 2. Le cas de dimension finie | 17 |
| Chapitre 2. Formes bilinéaires symétriques, généralités | 25 |
| 1. Premières définitions | 25 |
| 2. Matrices d'une forme bilinéaire | 28 |
| 3. Orthogonalité | 29 |
| 4. Vecteur et cône isotrope | 30 |
| 5. Formes quadratiques | 30 |
| 6. Bases orthogonales et orthonormales | 31 |
| 7. Réduction de Gauss | 32 |
| 8. Formes bilinéaires symétriques réelles | 34 |
| Chapitre 3. Espaces euclidiens | 39 |
| 1. Formes bilinéaires positives et définies positives | 39 |
| 2. Espace euclidien ; premières propriétés | 40 |
| 3. Le groupe orthogonal | 44 |
| 4. Dual d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme | 46 |
| 5. Endomorphismes symétriques et formes bilinéaires | 49 |
| Chapitre 4. Formes hermitiennes, espaces prehilbertiens | 51 |
| 1. Espaces vectoriels réels, espaces vectoriels complexes | 51 |
| 2. Formes sesqui-linéaires | 52 |
| 3. Matrices | 54 |
| 4. Formes quadratiques hermitiennes | 55 |
| 5. bases orthogonales, bases orthonormales | 56 |
| 6. Espaces hermitiens | 58 |
| 7. Espaces hermitiens ; premières propriétés | 59 |
| 8. Le groupe unitaire | 61 |
| 9. Dual d'un espace hermitien, adjoint d'un endomorphisme | 63 |

Rappels sur les matrices et applications linéaires

Dans tout ce polycopié la lettre \mathbb{K} désignera un corps ; la plupart du temps ce corps sera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Les matrices

1.1. Définitions.

DÉFINITION 0.1. On appelle *matrice* à p lignes et q colonnes à coefficients dans \mathbb{K} , la donnée de pq scalaires (éléments de \mathbb{K}) rangés dans un tableau à p lignes et q colonnes. Le scalaire placé à la i -ième ligne du tableau et à la j -ième colonne est appelé le *coefficient* (i, j) de la matrice. On note $M_{pq}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . La notation $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ signifie que le coefficient à la ligne i et à la colonne j de la matrice A est a_{ij} .

Si $p = 1$, on parle de *matrice ligne*.

Si $q = 1$, on parle de *matrice colonne*.

Si $p = q$, on parle de *matrice carrée*. On note simplement $M_p(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{pp}(\mathbb{K})$.

1.2. Addition et multiplication scalaire. On définit l'addition de deux matrices de **même taille** coefficient par coefficient. En voici la définition formelle.

DÉFINITION 0.2. Soient $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$. On appelle somme des matrices A et B , et on note $A + B$, la matrice $C = (c_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j \text{ tels que } 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q.$$

REMARQUE 0.1. La somme $A + B$ des deux matrices A et B n'est définie que pour des matrices de même taille.

De manière analogue, on définit le produit d'une matrice par un scalaire.

DÉFINITION 0.3. Soient $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note λA la matrice $C = (c_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \forall i, j \text{ tels que } 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q.$$

Les règles de manipulation de ces deux opérations sont très faciles à résumer :

PROPOSITION 0.1. *Muni des deux lois ci-dessus, $M_{pq}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.*

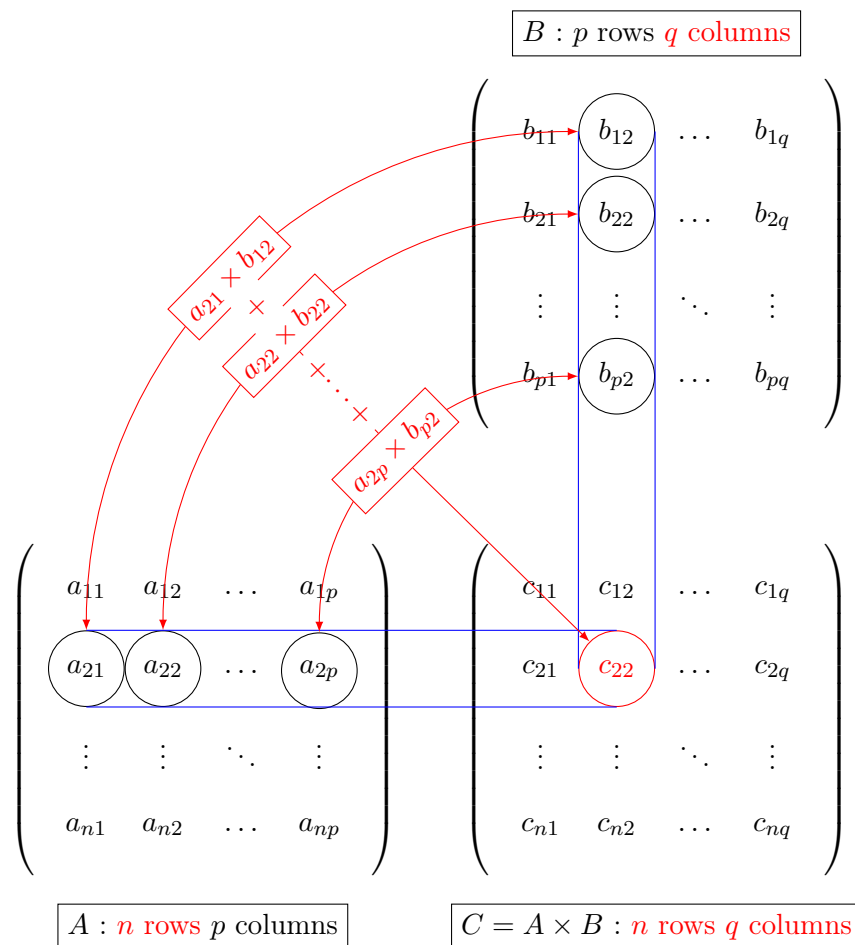


FIGURE 1. Produit de matrices

1.3. Produit matriciel. On définit le produit matriciel de la manière suivante.

DÉFINITION 0.4. Soient $A = (a_{ik}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj}) \in M_{qr}(\mathbb{K})$. On appelle produit de la matrice A par la matrice B , et on note AB , la matrice $C = (c_{ij}) \in M_{pr}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq q} a_{ik} b_{kj}, \forall i, j \text{ tels que } 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq r.$$

REMARQUE 0.2. Il est nécessaire pour définir AB que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B . Ainsi, le produit est une application

$$\begin{aligned}
 M_{pq}(\mathbb{K}) \times M_{qr}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{pr}(\mathbb{K}) \\
 (A, B) &\longmapsto AB.
 \end{aligned}$$

La règle sur les tailles des matrices A , B et AB ressemble à une « relation de Chasles » : $\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{r} = \vec{p}\vec{r}$.

Un moyen de retenir ceci facilement est de disposer les matrices à multiplier et le résultat comme sur la figure 1 (figure élaborée par Alain Matthes).

1.4. Inversion.

A). *Matrice identité.* Pour tout entier naturel non nul n , on définit la matrice identité, notée I_n , comme étant la matrice carrée de taille $n \times n$ ayant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice A à n colonnes et toute matrice B à n lignes, on a

$$AI_n = A \text{ et } I_n B = B.$$

DÉFINITION 0.5. Soit A une matrice **carrée** de taille n . S'il existe une matrice B vérifiant

$$AB = BA = I_n,$$

on dit que A est *inversible*. Dans ce cas, la matrice B (qui est forcément unique) est appelé l'inverse de A et est notée A^{-1} .

Voici quelques règles de calcul pour l'inverse.

PROPOSITION 0.2. Soit A et B deux matrices carrées de taille n et λ un scalaire non nul.

(i) Si A est inversible alors A^{-1} l'est aussi et

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(ii) Si A est inversible alors λA l'est aussi et

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

(iii) Si A et B sont inversibles alors AB l'est aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.5. Transposition. La transposée d'une matrice est la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient par son symétrique par rapport à la diagonale.

DÉFINITION 0.6. Soit $A = (a_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$. La *transposée* de A , notée tA , est la matrice de $M_{qp}(\mathbb{K})$ dont le coefficient à la ligne i et colonne j est a_{ji} .

Si la matrice A est carrée de taille n alors tA est aussi carrée de taille n . En revanche si A est rectangulaire et non carrée, tA n'a pas la même forme que A .

PROPOSITION 0.3. (i) Soit A et B deux matrices de même taille et λ un scalaire. On a

$${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB.$$

(ii) Transposer deux fois ne change rien puisque

$${}^t({}^tA) = A.$$

(iii) Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{qr}(\mathbb{K})$. Alors, on a

$${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA).$$

(iv) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors, si A est inversible alors tA l'est aussi et

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

2. Applications linéaires

2.1. Premiers exemples d'applications linéaires. On s'intéresse aux applications d'un espace vectoriel dans un autre qui ont un comportement agréable relativement aux deux opérations d'un espace vectoriel.

DÉFINITION 0.7. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} . Une application f de E dans F est une *application linéaire* si :

- (i) pour tout u et v dans E , $f(u + v) = f(u) + f(v)$;
- (ii) pour tout u dans E et λ dans \mathbb{K} , $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Cas particuliers. Si $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme* de E .

Notation.

- (i) On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- (ii) On note $\mathcal{L}(E)$ pour $\mathcal{L}(E, E)$, c'est-à-dire l'espace des endomorphismes de E .
- (iii) Si l'espace d'arrivée est l'espace vectoriel \mathbb{K} , alors l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E^* et s'appelle le *dual* de E . C'est un objet très intéressant et qui sera étudié en détail au prochain chapitre.

Les premières conséquences de cette définition sont résumées dans la proposition suivante.

PROPOSITION 0.4. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} et f une application linéaire. Alors :

- (i) $f(0) = 0$.
- (ii) Pour tout u dans E , $f(-u) = -f(u)$.
- (iii) Pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dans \mathbb{K} et u_1, u_2, \dots, u_n dans E , on a :

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_n f(u_n).$$
- (iv) Si G est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F .
- (v) Si G est un sous-espace vectoriel de F , alors $f^{-1}(G)$ est un sous-espace vectoriel de E .

PROPOSITION 0.5. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} . Une application $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire si et seulement si pour tout u et v dans E et λ dans \mathbb{K} ,

$$f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

2.2. Opérations sur $\mathcal{L}(E, F)$. Nous allons voir dans cette section que les applications linéaires se composent, s'additionnent et peuvent être multipliées par un scalaire. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit λf comme l'application de E dans F définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout x dans E . On définit $f + g$ comme l'application de E dans F définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, pour tout x dans E . On vérifie que λf et $f + g$ sont deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$.

PROPOSITION 0.6. Muni des deux lois ci-dessus, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Soit G un troisième espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

PROPOSITION 0.7. La composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

2.3. Noyau et Image. On associe deux sous-espaces vectoriels (un de E et un de F) à toute application linéaire.

DÉFINITION 0.8. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} et f une application linéaire de E dans F .

- (i) L'ensemble $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\}) = \{u \in E, f(u) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé le *noyau* de f .
- (ii) L'ensemble $\text{Im } f = f(E) = \{f(u), u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F , appelé l'*image* de f .

Ces sous-espaces vectoriels permettent de caractériser l'injectivité et la surjectivité de f .

PROPOSITION 0.8. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{K} et f une application linéaire de E dans F . Alors,

- (i) f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0\}$;
- (ii) f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

La dimension de l'image et la dimension du noyau sont reliées par le théorème du rang.

THÉORÈME 0.9. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim E = \dim \text{ker } f + \dim \text{Im } f$.

2.4. Représentation matricielle. Nous savons que les vecteurs d'un espace vectoriel peuvent être repérés par des vecteurs coordonnées en présence d'une base. Nous allons voir qu'une application linéaire peut-être encodée par une matrice en présence de bases.

LEMME 0.10. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Notons $q \in \mathbb{N}$ la dimension de E . Choisissons une base $\mathcal{B}_E = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ de E .

- (i) Soit f et g deux applications linéaires de E dans F . Alors, $f = g$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $f(u_i) = g(u_i)$.

(ii) Soit (w_1, \dots, w_q) une famille quelconque de vecteurs de F . Alors, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que $f(u_i) = w_i$.

DÉFINITION 0.9. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, respectivement. Soit f une application linéaire de E dans F . Choisissons une base $\mathcal{B}_E = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ de E et une base $\mathcal{B}_F = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ de F . On appelle matrice de f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F la matrice $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, dont la j -ième colonne est le vecteur des coordonnées du vecteur $f(u_j)$ dans la base \mathcal{B}_F , pour tout $1 \leq j \leq q$.

Notation. La matrice A sera notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f)$.

REMARQUE 0.3. Attention, dans la notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f)$ l'ordre d'écriture des bases est très important et peut-être paradoxal : **on écrit la base de l'espace d'arrivée F en premier**. On remarquera que cette notation est compatible avec la notation $M_{pq}(\mathbb{K})$: le nombre de ligne qui est la dimension de F est écrit en premier.

THÉORÈME 0.11. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, respectivement. On suppose que E et F sont munis de bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F . Alors, l'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow M_{pq}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

2.5. Produit matriciel et composition.

THÉORÈME 0.12. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F des bases de E et F .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et u un vecteur de E . On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

REMARQUE 0.4. La notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f)$ est un peu lourde. De plus, nous avons choisi d'écrire les bases \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_E en commençant par celle de l'espace d'arrivée. Ces choix ont l'avantage de rendre le théorème 0.12 facile à mémoriser. Il ressemble à une formule de Chasles : les deux bases identiques et côte à côte dans l'expression de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ ont disparu dans $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(u))$.

Le produit des matrices correspond à la composition des applications linéaires.

THÉORÈME 0.13. Soit E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit \mathcal{B}_E , \mathcal{B}_F et \mathcal{B}_G des bases de E , F et G .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G \mathcal{B}_F}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f).$$

2.6. Application linéaire associée à une matrice. En présence de bases, à chaque application linéaire nous avons associé une matrice. Dans cette section, nous partons à l'inverse d'une matrice et lui associons une application linéaire.

Soit $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$. Nous notons ici les vecteurs de \mathbb{K}^p (et \mathbb{K}^q) en colonne. Ainsi, un vecteur de \mathbb{K}^p est pensé comme une matrice à 1 colonne et p lignes. En particulier, le produit AX est bien défini pour tout X dans \mathbb{K}^q . De plus, AX est une matrice colonne à p lignes, c'est-à-dire un vecteur de \mathbb{K}^p . Considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} \tilde{A} : \mathbb{K}^q &\longrightarrow \mathbb{K}^p \\ X &\longmapsto AX. \end{aligned}$$

Les relations suivantes

$$A(X + Y) = AX + AY, \text{ et } A(\lambda X) = \lambda(AX)$$

valables pour tout X et Y dans \mathbb{K}^q et tout λ dans \mathbb{K} montrent que \tilde{A} est linéaire.

Le lemme suivant exprime une cohérence entre ces constructions.

LEMME 0.14. *Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{K}^q et \mathcal{C} celle de \mathbb{K}^p . On a :*

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\tilde{A}) = A.$$

2.7. Isomorphisme et application linéaire réciproque.

DÉFINITION 0.10. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On dit que f est un *isomorphisme* si f est bijective.

Par définition, si f est un isomorphisme, on a :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad f(x) = y.$$

On peut donc définir une application réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ qui à tout y dans F associe l'unique x de E tel que $f(x) = y$. Cette application vérifie :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

PROPOSITION 0.15. *Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Alors, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi linéaire. Ainsi, f^{-1} est aussi un isomorphisme.*

PROPOSITION 0.16. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors, se valent :*

- (i) f est un isomorphisme ;
- (ii) f est injective et $\dim(E) = \dim(F)$;
- (iii) f est surjective et $\dim(E) = \dim(F)$.

2.8. Changements de bases.

A). *Matrices de l'identité.* Soit E un espace vectoriel. Considérons l'application identité :

$$\begin{aligned} \text{Id} : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On vérifie que la matrice de l'identité dans la base \mathcal{B} est la suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

La matrice I_n est appelée *matrice identité*.

La matrice identité est donc la matrice de l'application identité si l'on utilise la même base \mathcal{B} au départ et à l'arrivée. En revanche, si l'on utilise deux bases différentes nous allons voir que l'on obtient des matrices de l'application identité « bizarres ». Ces matrices vont s'avérer très utiles par la suite.

Supposons donc que l'on ait une deuxième base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de E . Considérons la matrice de l'identité $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id})$.

La j -ième colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id})$ est constituée des coordonnées de $\text{Id}(f_j) = f_j$ dans la base \mathcal{B} .

Le lien entre $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id})$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\text{Id})$ est le suivant.

PROPOSITION 0.17. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Alors, on a la relation*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id}) = (\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\text{Id}))^{-1}.$$

B). *Cas des vecteurs.* Soit E un espace vectoriel muni de deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Un vecteur de E est représenté par deux vecteurs colonnes suivant que l'on utilise la base \mathcal{B} ou \mathcal{C} . On se propose ici de comprendre comment passer d'un de ces vecteurs colonnes à l'autre. Nous allons voir que la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id})$ peut servir à cela. En particulier, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id})$ est souvent appelé *matrice de passage*.

REMARQUE 0.5. On trouve quelque fois les termes matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} et matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{B} pour désigner les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id})$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\text{Id})$. Il est difficile (et inutile) de se souvenir quel terme correspond à quelle matrice. Dans ce cours, nous éviterons volontairement d'utiliser ces termes.

Fixons un vecteur v de E . Puisque l'on a deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , on a deux vecteurs coordonnées pour représenter v :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v).$$

Le théorème 0.12 appliqué à l'identité

$$v = \text{Id}(v)$$

donne

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\text{Id}).\text{Mat}_{\mathcal{C}}(v); \\ \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\text{Id}).\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v). \end{aligned}$$

C). *Cas des applications linéaires.* Soit maintenant E et F deux espaces vectoriels. Soit \mathcal{B}_E et \mathcal{C}_E (resp. \mathcal{B}_F et \mathcal{C}_F) deux bases de E (resp. de F).

Soit maintenant $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Comme nous avons plusieurs bases la matrice f est représentée par deux matrices

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{C}_F \mathcal{C}_E}(f).$$

Les matrices de l'identité permettent de passer de l'une de ces matrices à l'autre. Plus précisément, le théorème 0.13 appliqué à l'égalité

$$f = \text{Id} \circ f \circ \text{Id}$$

donne

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_F \mathcal{C}_E}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}_F \mathcal{B}_F}(\text{Id}) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F \mathcal{B}_E}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E \mathcal{C}_E}(\text{Id}).$$

Dualité

1. Définitions

Rappelons que si E et F sont deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} , alors l'espace des applications linéaires de E dans F (noté $\mathcal{L}(E, F)$) est un espace vectoriel (voir la proposition 0.6). Dans ce chapitre nous allons étudier le cas particulier où l'espace d'arrivée est le corps \mathbb{K} .

DÉFINITION 1.1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel ; une application de E dans \mathbb{K} est appelée une *forme linéaire* sur E ; l'ensemble des formes linéaires sur E est l'espace dual de E . On le note E^* .

EXEMPLE 1.1. (i) Considérons l'espace vectoriel $E_1 = \mathbb{R}^3$, alors l'application de E dans \mathbb{R} définie par $f(x, y, z) = 2x + 3y - \pi z$ est une forme linéaire.

(ii) Si $E_2 = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on peut définir la forme linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(\lambda) \end{aligned}$$

(iii) Si E_3 est le sous-espace vectoriel de E_2 des fonctions continues, l'application :

$$\begin{aligned} I : F &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(x)dx \end{aligned}$$

est une forme linéaire.

(iv) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; pour tout vecteur de $v \in E$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on peut donc définir l'application $\varphi_i(v) = \lambda_i$. On peut vérifier que c'est bien une forme linéaire.

DÉFINITION 1.2. Soient E , F et G trois espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} ; une application B de $E \times F$ dans G est *bilinéaire* si les applications partielles : $u \mapsto B(u, v)$ et $v \mapsto B(u, v)$ sont linéaires. Si G est le corps \mathbb{K} et si B est bilinéaire, on dit que B est une *forme bilinéaire sur $E \times F$* .

REMARQUE 1.1. La condition de bilinéarité se traduit par les assertions suivantes :

$$\forall v \in F, \forall (u_1, u_2) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, B(u_1 + \lambda u_2, v) = B(u_1, v) + \lambda B(u_2, v)$$

et

$$\forall u \in E, \forall (v_1, v_2) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, B(u, v_1 + \lambda v_2) = B(u, v_1) + \lambda B(u, v_2)$$

Sur $E \times E^*$, l'évaluation permet de définir une forme bilinéaire *naturelle*. On trouve également le terme forme bilinéaire *canonique*.

DÉFINITION 1.3. Soit E un espace vectoriel et E^* son dual. Pour tout $(v, \varphi) \in E \times E^*$, on définit $\langle v, \varphi \rangle = \varphi(v)$.

PROPOSITION 1.1. *L'application $(v, \varphi) \mapsto \langle v, \varphi \rangle$ est une forme bilinéaire sur l'espace $E \times E^*$.*

PREUVE. C'est immédiat en appliquant la définition. \square

1.1. Le bidual. On peut considérer le *bidual* de l'espace E , c'est le dual de E^* , on le note E^{**} .

On définit une application *naturelle* de E dans E^{**} . Pour cela, on remarque que pour tout $v \in E$, on peut définir une forme linéaire sur E^* (et donc un élément de E^{**}) en posant : $\varphi \mapsto \varphi(v)$. On a donc une application :

$$J_E : E \rightarrow (E^*)^* \\ v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$$

PROPOSITION 1.2. *L'application J_E définie ci-dessus est linéaire et injective.*

PREUVE. La linéarité est immédiate à vérifier, elle provient de la bilinéarité du crochet de dualité.

Pour montrer l'injectivité, il suffit donc de montrer que le noyau de J_E est réduit à 0. Par l'absurde, supposons que v non nul appartiennent au noyau de J_E , alors pour tout $\varphi \in E^*$, on a : $\langle v, \varphi \rangle = 0$. Soit D la droite engendrée par v et H un supplémentaire à D ¹. Comme $E = D \oplus H$, il existe une (unique) forme φ telle que $\varphi(v) = 1$ et $\varphi|_H = 0$. On obtient donc une contradiction, puisque $\langle v, \varphi \rangle = 1$. \square

REMARQUE 1.2.

- (i) L'application J_E est appelée application *naturelle* ou *canonique* de E dans E^{**} . On peut formaliser de façon explicite la définition de naturel (ou canonique) mais ceci dépasse le niveau de ce cours. On remarquera simplement que cette application est définie sans faire référence à une base de E ou de E^{**} .
- (ii) Le lien entre le crochet de dualité et J_E et le suivant : quelque soit $v \in E$ et quelque soit $\varphi \in E^*$, on a l'égalité : $\langle v, \varphi \rangle = \langle \varphi, J_E(v) \rangle$. Bien qu'ils soient notés de la même façon, les deux crochets n'ont pas le même sens. Le premier est le crochet de dualité sur $E \times E^*$, le second est le crochet de dualité sur $E^* \times E^{**}$.

1.2. Transposition. A toute application linéaire f de E dans F , on associe une application, appelée la transposée de f de F^* dans E^* (attention au changement de sens).

DÉFINITION 1.4. L'application transposée de f est définie de la façon suivante :

$${}^t f : F^* \rightarrow E^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f .$$

Voici les principales propriétés de la transposition.

PROPOSITION 1.3. (i) *On a l'identité suivante : pour tout $v \in E$ et pour toute $\varphi \in F^*$: $\langle f(v), \varphi \rangle = \langle v, {}^t f(\varphi) \rangle$;*

(ii) *l'application ${}^t f$ est linéaire ;*

1. L'existence de H est admise si E est de dimension infinie

(iii) l'application induite par la transposition :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{L}(F^*, E^*) \\ f & \mapsto & {}^t f \end{array}$$

est linéaire.

(iv) Si G est un espace vectoriel, et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors on a l'égalité suivante (dans $\mathcal{L}(G^*, E^*)$) : ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

PREUVE.

- (i) Par définition de ${}^t f$ et du crochet de dualité.
- (ii) La linéarité de ${}^t f$ découle directement de la bilinéarité du crochet de dualité, en effet soit φ_1, φ_2 deux formes linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $v \in E$, on a ${}^t f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(v) = \langle v, {}^t f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \rangle$. Grâce au point précédent, et à la bilinéarité du crochet de dualité, on a : $\langle v, {}^t f(\varphi_1 + \lambda\varphi_2) \rangle = \langle f(v), \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle = \langle f(v), \varphi_1 \rangle + \langle f(v), \lambda\varphi_2 \rangle$. On conclut en utilisant de nouveau le point précédent.
- (iii) La preuve est très similaire à la preuve du point précédent.
- (iv) L'égalité provient d'un simple calcul. D'une part pour tout $\varphi \in G^*$ et pour tout $v \in E$, on a :

$${}^t f \circ {}^t g(\varphi)(v) = \langle v, {}^t f \circ {}^t g(\varphi) \rangle = \langle f(v), {}^t g(\varphi) \rangle = \langle g \circ f(v), \varphi \rangle.$$

D'autre part :

$${}^t(g \circ f)(\varphi)(v) = \langle v, {}^t(g \circ f)(\varphi) \rangle = \langle g \circ f(v), \varphi \rangle.$$

□

EXEMPLE 1.2. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors il n'y a pas d'injection naturelle de F^* dans E^* . En fait l'injection $i : F \rightarrow E$ définit une surjection de E^* sur F^* . Montrer cette surjectivité comme exercice dans le cas de dimension finie.

REMARQUE 1.3. Nous venons de voir que l'opération transposition d'une application linéaire a des propriétés similaires à la transposition des matrices (voir la proposition 0.3). Ce n'est pas un hasard, nous allons voir que les deux notions coïncident en dimension finie.

2. Le cas de dimension finie

A partir de cette section et jusqu'à la fin du chapitre, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

2.1. Un rappel. Commençons par un rappel sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et m . On se donne $\mathcal{B}_E = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ une base de F . Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est uniquement déterminée par l'image par f des éléments de \mathcal{B}_E (voir le lemme 0.10).

NOTATION 1.1. Rappelons que δ_j^i (que l'on appelle symbole de Kronecker) est égal à 1 si $i = j$ et 0 dans tous les autres cas.

DÉFINITION 1.5. On définit pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$, l'application linéaire suivante : $f_{i,j}(v_i) = \delta_i^j w_j$.

PROPOSITION 1.4. *Les applications $(f_{i,j})_{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,m\}}$ forment une base de $\mathcal{L}(E, F)$ qui est donc un espace de dimension finie mn .*

PREUVE. La preuve est immédiate, en effet si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{i,j} w_j$ alors on peut écrire $f = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_{i,j}$ et cette écriture est unique. \square

2.2. Base duale et base antéduale. Si on spécialise la base définie dans la proposition précédente dans le cas où $F = \mathbb{K}$ et $\mathcal{B}_F = (1)$, on obtient la famille suivante :

DÉFINITION 1.6. Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, définissons l'unique forme linéaire v_i^* vérifiant $v_i^*(v_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

On obtient alors comme cas particulier de la proposition 1.4 :

COROLLAIRE 1.1. *La famille $\mathcal{B}_E^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ forment une base de E^* et $\dim E = \dim E^*$.*

REMARQUE 1.4. (i) La base \mathcal{B}_E^* s'appelle la base duale de \mathcal{B}_E .

(ii) Les applications coordonnées φ_i définies dans le point (iv) de l'exemple 1.1 et les applications v_i^* sont identiques.

Comme E et E^* sont de même dimension, E et E^{**} sont également de même dimension. On a construit une application J_E de E dans son bidual E^{**} qui est injective, voir la proposition 1.2. On en déduit immédiatement :

PROPOSITION 1.5. *Si E est de dimension finie, alors l'application J_E est un isomorphisme.*

En dimension finie, on peut donc identifier l'espace et son bidual. On a le même genre de résultat sur la transposition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors ${}^t f$ est une application de F^* dans E^* , et ${}^t({}^t(f))$ est une application de E^{**} dans F^{**} . On a la relation suivante entre f et ${}^t({}^t(f))$:

PROPOSITION 1.6. *Pour tout $v \in E$, on a : $J_F(f(v)) = {}^t({}^t(f))(J_E(v))$.*

PREUVE. Une fois de plus c'est un jeu entre les propriétés du crochet de dualité, de la transposée et de J_E . Pour tout $v \in E$ et pour tout $\varphi \in F^*$, on a :

$$\langle \varphi, J_F(f(v)) \rangle = \langle f(v), \varphi \rangle = \langle v, {}^t f(\varphi) \rangle.$$

La première égalité provient de la définition de J_F (voir la remarque 1.2). La deuxième égalité est vraie par définition de la transposée. On applique encore une fois la remarque 1.2 et la définition de la transposée pour obtenir :

$$\langle v, {}^t f(\varphi) \rangle = \langle {}^t f(\varphi), J_E(v) \rangle = \langle \varphi, {}^t({}^t f)(J_E(v)) \rangle.$$

\square

REMARQUE 1.5.

(i) Les propositions 1.5 et 1.6 identifient *naturellement* E et son bidual et les applications f avec ${}^t({}^t(f))$.

- (ii) Comme E et E^* ont même dimension, il existe des isomorphismes entre E et E^* . Mais on peut montrer qu'aucun de ces isomorphismes n'est naturel où canonique, à la différence de l'isomorphisme J_E . On verra plus tard que se donner un isomorphisme entre E et E^* est équivalent à se donner une structure supplémentaire sur E .

La construction de la base duale admet une réciproque :

PROPOSITION 1.7. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{F} une base de E^* . Il existe une unique base \mathcal{B} de E (appelée base antéduale de \mathcal{F}) telle que $\mathcal{B}^* = \mathcal{F}$.*

PREUVE. Plusieurs preuves de cette proposition seront données en TD. \square

2.3. Orthogonalité. Le crochet de dualité va nous permettre de définir une notion d'orthogonalité qui a des propriétés similaires à la notion d'orthogonalité induite par un produit scalaire sur un espace vectoriel.

DÉFINITION 1.7. Soit E un espace vectoriel et E^* son dual, soient X une partie de E et Y une partie de E^* , on définit les parties suivantes :

- (i) L'orthogonal de X , noté X^\perp qui est le sous-ensemble de E^* suivant :

$$X^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in X \langle v, \varphi \rangle = 0\}.$$

- (ii) L'orthogonal de Y , noté ${}^\perp Y$ qui est le sous-ensemble de E suivant :

$${}^\perp Y = \{v \in E \mid \forall \varphi \in Y \langle v, \varphi \rangle = 0\}.$$

REMARQUE 1.6. Pour une partie Y de E^* , on peut définir deux ensembles orthogonaux : le premier définit ci-dessus noté ${}^\perp Y$ est inclus dans E ; on peut également définir Y^\perp comme une partie de E^{**} . En dimension finie, les deux notions coïncident grâce à l'identification de E et E^{**} via J_E . En effet, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.8. *Pour toute partie Y de E^* , on a : $J_E({}^\perp Y) = Y^\perp$.*

PREUVE. Pour montrer cet identité, montrons d'abord que $J_E({}^\perp Y) \subset Y^\perp$. Soit $v \in {}^\perp Y$, alors pour tout $\varphi \in Y$ on a : $\langle v, \varphi \rangle = 0$, mais d'après la remarque 1.2, on sait que $\langle v, \varphi \rangle = \langle \varphi, J_E(v) \rangle$, donc on a bien $J_E(v) \in Y^\perp$. Réciproquement si $w \in Y^\perp$, alors comme l'application J_E est bijective, il existe $v \in E$ tel que $J_E(v) = w$. Grâce aux égalités précédentes, on en déduit immédiatement que $v \in {}^\perp Y$ et donc $Y^\perp \subset J_E({}^\perp Y)$. \square

Pour pouvoir énoncer la proposition qui rassemble les principales propriétés de l'orthogonalité, nous allons d'abord rappeler la notion de codimension d'un sous-espace vectoriel F de E .

DÉFINITION 1.8. Si F est un sous-espace vectoriel de E on appelle codimension de F dans E la différence $\dim E - \dim F$. Cette différence est notée $\text{codim}_E(F)$ ou plus simplement $\text{codim}(F)$ si l'espace ambiant E est sous-entendu.

PROPOSITION 1.9. *On reprend les notations de la définition précédente.*

- (i) L'ensemble X^\perp (resp. ${}^\perp Y$) est un sous-espace vectoriel de E^* (resp. de E).
- (ii) Si $X_1 \subset X_2 \subset E$ (resp. $Y_1 \subset Y_2 \subset E^*$), alors $X_2^\perp \subset X_1^\perp$ (resp. ${}^\perp Y_2 \subset {}^\perp Y_1$).

- (iii) Si F (resp. G) est le sous-espace vectoriel de E (resp. de E^*) engendré par X (resp. par Y) alors on a les égalités $F^\perp = X^\perp$ et ${}^\perp G = {}^\perp Y$.
- (iv) Si F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de E^*), on a les égalités suivantes : $\dim F = \text{codim } F^\perp$ et $\dim G = \text{codim } {}^\perp G$.
- (v) Si F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de E^*), alors on a : ${}^\perp(F^\perp) = F$ et $({}^\perp G)^\perp = G$.

PREUVE. Chacune de ses assertions contient deux versions ; une pour l'orthogonal d'une partie de E , l'autre pour une partie de E^* . Nous ne montrerons que la première version, la deuxième s'en déduit ou bien en adaptant la preuve de la première version, ou bien en utilisant la proposition 1.8.

- (i) Montrons que X^\perp est un sous-espace vectoriel de E^* . Soit φ_1, φ_2 deux formes appartenant à X^\perp et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in X$, on a : $\langle x, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle = \langle x, \varphi_1 \rangle + \lambda\langle x, \varphi_2 \rangle = 0$, donc $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \in X^\perp$.
- (ii) Ce point est évident.
- (iii) Comme $X \subset F$, par le point précédent on a : $F^\perp \subset X^\perp$. Réciproquement soit $\varphi \in X^\perp$, il faut montrer que pour tout $v \in F$, $\langle v, \varphi \rangle = 0$. Si $v \in F$, alors il existe un entier p , p vecteurs v_1, \dots, v_p dans X et p scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.
On a alors $\langle v, \varphi \rangle = \lambda_1 \langle v_1, \varphi \rangle + \dots + \lambda_p \langle v_p, \varphi \rangle$ par bilinéarité du crochet. On conclut en remarquant que tous les termes de la somme sont nuls puisque pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ on a $v_i \in X$.
- (iv) Soit F un sous-espace de E de dimension k , soit (v_1, v_2, \dots, v_k) une base de F que l'on complète en une base (v_1, v_2, \dots, v_n) de E . Soit $(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ la base duale associée, montrons que F^\perp est engendré par $(v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \dots, v_n^*)$. Si $\varphi \in F^\perp$ alors comme $(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ est une base de E^* , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$, mais comme $\varphi \in F^\perp$ pour tout $i \in 1, \dots, k$, on a $0 = \langle v_i, \varphi \rangle = \lambda_i$. Et v est combinaison linéaire des vecteurs $v_{k+1}^*, v_{k+2}^*, \dots, v_n^*$.
- (v) Par définition, on a l'inclusion : $F \subset {}^\perp(F^\perp)$; d'après le point précédent, les deux espaces ont même dimension, d'où l'égalité.

□

REMARQUE 1.7. On a maintenant à notre disposition quelques unes des propriétés les de la dualité en dimension finie.

- La dualité transforme E en un espace de même dimension, mais « différent ».
- La dualité transforme une application linéaire de E dans F en une application de « sens opposé », c'est à dire de F^* dans E^* .
- C'est une involution, c'est à dire que si on la compose avec elle-même, on obtient l'identité.
- L'orthogonalité établie une correspondance en sous-espace de E de dimension d et sous-espace de E^* de codimension d .

On verra également dans la sous-section 2.5 que les deux façons de décrire un sous-espace vectoriel de E (paramétrique vs cartésienne) peut s'interpréter en terme de dualité.

2.4. Sous-espaces et formes linéaires. Un cas particulier du point (iv) de la proposition 1.9 est le cas où G est de dimension 1. Alors G est engendré par une forme

linéaire non nulle. L'espace ${}^{\perp}G$ est de codimension 1. Ces sous-espaces qui généralisent la notion de droites dans un plan ou de plan dans l'espace tridimensionnel, portent un nom :

DÉFINITION 1.9. Un sous-espace vectoriel de E de codimension 1 est appelé hyperplan de E .

Voici une caractérisation des hyperplans qui nous sera utile dans la suite.

PROPOSITION 1.10. Soit H un sous-espace vectoriel de E , on a équivalence entre :

- (i) H est un hyperplan de E .
- (ii) Pour tout $v \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}v$

PREUVE. Si H est un hyperplan et si $v \in E \setminus H$, alors $H \cap \mathbb{K}v = 0$ et

$$\dim(H \oplus \mathbb{K}v) = \dim H + 1 = \dim E,$$

d'où l'égalité $E = H \oplus \mathbb{K}v$. Réciproquement si $E = H \oplus \mathbb{K}v$, alors $\dim H = \dim E - 1$. \square

A toute forme linéaire non nulle φ , on peut donc associer un hyperplan $H = {}^{\perp} \varphi$. De façon évidente, deux formes linéaires non nulles proportionnelles définissent le même hyperplan. On peut préciser ceci :

PROPOSITION 1.11. Deux formes linéaires non nulles φ_1 et φ_2 définissent un même hyperplan H de E si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, non nul tel que : $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$.

PREUVE. Soient φ_1, φ_2 deux formes linéaires non nulles telles que $H = {}^{\perp} \varphi_1 = {}^{\perp} \varphi_2$. Soit $v \in E \setminus H$, alors d'après la proposition 1.10, on a $E = H \oplus \mathbb{K}v$. En restriction à $\mathbb{K}v$ les deux formes linéaires φ_1 et φ_2 sont proportionnelles, c'est-à-dire il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\varphi_1|_{\mathbb{K}v} = \lambda\varphi_2|_{\mathbb{K}v}$. Sur H les deux formes sont nulles et vérifient donc la même relation : $\varphi_1|_H = \lambda\varphi_2|_H$ et comme $E = H \oplus \mathbb{K}v$, on a bien $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ sur E . La réciproque est évidente. \square

La proposition 1.11 nous dit que les zéros d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $\varphi(v) = 0$ est de codimension 1. On veut généraliser cet énoncé et exprimer la dimension de l'ensemble des zéros communs d'une famille de formes linéaires où ce qui revient au même, la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

PROPOSITION 1.12. On se donne une famille finie de formes linéaires :

$$\mathcal{F} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p),$$

et soit F le sous-espace vectoriel suivant :

$$F = \{v \in E \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, \varphi_i(v) = 0\};$$

alors $\dim F = \dim E - \text{rg } \mathcal{F}$

PREUVE. Il suffit d'utiliser la proposition 1.9. Soit G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par la famille \mathcal{F} . Par définition, on a $F = {}^{\perp} G$ et $\text{rg } \mathcal{F} = \dim G$, on conclut par le point (iv) de la proposition 1.9. \square

2.5. Équations paramétriques vs équations cartésiennes. Soit E un espace vectoriel ; on peut définir un sous-espace F de E de deux façons :

- (i) Soit \mathcal{F} une famille génératrices \mathcal{F} de F ; les vecteurs de F sont les combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{F} . Plus précisément, si $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ alors :

$$F = \{v \in E \mid \exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k v = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\}.$$

C'est une description *paramétrique* de F .

- (ii) Un sous-espace F peut également être défini comme l'ensemble des zéros communs d'une famille $\mathcal{F}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ de formes linéaires :

$$F = \{v \in E \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, \varphi_i(v) = 0\}$$

C'est une description de F par des équations *cartésiennes*.

Les deux descriptions de F sont duales l'une de l'autre ; en effet, F est défini par une famille $\mathcal{F}^* = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$ de formes linéaires si et seulement si \mathcal{F}^* est une famille génératrice de F^\perp .

2.6. Représentation matricielle. Soit $\varphi \in E^*$, alors comme vecteur de E^* , on peut décomposer φ dans la base duale $\mathcal{B}_E^* : \varphi = \varphi_1 v_1^* + \varphi_2 v_2^* + \dots + \varphi_n v_n^*$. Si on considère φ comme un vecteur, on définira comme dans la section B), $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*}(\varphi)$ la matrice *colonne* :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

Soit (1) la base canonique de \mathbb{K} , si on considère φ comme une application linéaire, on peut définir la matrice *ligne* :

$$\text{Mat}_{(1), \mathcal{B}_E}(\varphi) = (\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n)).$$

Les deux matrices ci-dessus sont reliées, en effet par définition de la base duale, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*}(\varphi) = {}^t(\text{Mat}_{(1), \mathcal{B}_E}(\varphi)).$$

Cette dernière écriture est très utile pour calculer l'évaluation de φ sur un vecteur $v \in E$, en effet on a :

$$\varphi(v) = \text{Mat}_{(1), \mathcal{B}_E}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(v).$$

2.7. matrice de la transposée. On peut se demander s'il existe un lien entre la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*, \mathcal{B}_F^*}({}^t f)$.

Pour décrire ce lien rappelons que l'on a définie la notion de transposée d'une matrice dans la première partie, (voir la définition 0.6). Les deux définitions de transposition pour les matrices et pour les applications linéaires se correspondent :

PROPOSITION 1.13. *On a égalité : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*, \mathcal{B}_F^*}({}^t f) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$.*

PREUVE. Rappelons que le coefficients a_{ij} (placé à la ligne i et à la colonne j) de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ est égal à la coordonnée sur w_i du vecteur $f(v_j)$, ce que l'on peut écrire $a_{ij} = \langle f(v_j), w_i^* \rangle$. On doit montrer que ce coefficient est égal au coefficient b_{ji} (placé à la ligne j et à la colonne i) de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*, \mathcal{B}_F^*}({}^t f)$. Par définition, ce coefficient est égal à la coordonnée sur v_j^* de la forme linéaire ${}^t f(w_i^*)$, mais par

définition de v_j^* , ce coefficient est égal à ${}^t f(w_i^*)(v_j)$. On conclut en remarquant que :
 $b_{ji} = {}^t f(w_i^*)(v_j) = \langle v_j, {}^t f(w_i^*) \rangle = \langle f(v_j), w_i^* \rangle = a_{ij}$. \square

REMARQUE 1.8. Rappelons que la transposition définie sur les applications linéaires est presque une involution (voir la proposition 1.6).

Sur les matrices, la transposition est une vraie involution puisque pour toute matrice A on a ${}^t({}^t A) = A$ (voir la proposition 0.3).

2.8. Formule de changement de base. On se donne une autre base \mathcal{C}_E de E . Soit $\varphi \in E^*$, alors on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*}(\varphi) = {}^t (\text{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)) \text{Mat}_{\mathcal{C}_E^*}(\varphi).$$

Si f une application linéaire de E dans F et si \mathcal{C}_F est une base de F , alors on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*, \mathcal{B}_F^*}({}^t f) = {}^t (\text{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)) \text{Mat}_{\mathcal{C}_E^*, \mathcal{C}_F^*}({}^t f) {}^t (\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\text{Id}_F)).$$

PREUVE.

Pour obtenir ces deux formules, on considère les formules de changement de base énoncées dans les sections B) et C) auxquelles on applique l'opération de transposition. \square

REMARQUE 1.9. La deuxième égalité est équivalente à :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E^*, \mathcal{C}_E^*}(\text{Id}_{E^*}) = {}^t (\text{Mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{B}_E}(\text{Id}_E)) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{C}_F^*, \mathcal{B}_F^*}(\text{Id}_{F^*}) = {}^t (\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{C}_F}(\text{Id}_F)).$$

Formes bilinéaires symétriques, généralités

Dans cette partie, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

1. Premières définitions

Rappelons une définition :

DÉFINITION 2.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} ; une application ϕ de $E \times F$ dans \mathbb{K} est une forme *bilinéaire* si les deux applications partielles : $u \mapsto \phi(u, v)$ et $v \mapsto \phi(u, v)$ sont linéaires.

Dans le cas particulier où $E = F$, on peut définir trois sous-classes particulières des formes bilinéaires.

DÉFINITION 2.2. (i) Une forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ est dite *symétrique* si pour tout $u, v \in E$, $\phi(u, v) = \phi(v, u)$.

(ii) Une forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ est dite *antisymétrique* si pour tout $u, v \in E$, $\phi(u, v) = -\phi(v, u)$.

(iii) Une forme bilinéaire ϕ sur $E \times E$ est dite *alternée* si pour tout $u \in E$, $\phi(u, u) = 0$.

EXEMPLE 2.1. Donnons ici quelques exemples de formes bilinéaires :

(i) Si on se donne deux formes linéaires $\psi, \psi' \in E^*$ on peut définir la forme bilinéaire : $\phi(v, w) = \psi(v) \cdot \psi'(w)$.

(ii) Si $E = \mathbb{R}[X]_n$, on peut définir $\phi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ qui est une forme bilinéaire symétrique.

(iii) Si ϕ est une forme bilinéaire sur E et si F est un sous-espace vectoriel de E , on peut alors considérer la restriction $\phi|_F$ de ϕ à F ; cette restriction est une forme bilinéaire sur F .

(iv) Si $E = \mathbb{R}^3$, vous avez déjà rencontré le produit scalaire standard défini par $v \cdot w = xx' + yy' + zz'$, où $v = (x, y, z)$ et $w = (x', y', z')$. C'est une forme bilinéaire symétrique.

(v) Sur $E = \mathbb{R}^3$, on pose $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - yy'$. Cela définit une forme bilinéaire symétrique.

(vi) Sur $E = \mathbb{K}^2$, la forme $\phi(v, w) = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$ est une forme alternée. (Rappelons que si on se donne n vecteurs (v_1, v_2, \dots, v_n) d'un espace de dimension n , alors on définit $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ comme le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des n vecteurs dans la base \mathcal{B} .)

(vii) Si ϕ est une forme bilinéaire sur E , on peut définir :

$$\phi_s(v, w) = \frac{1}{2}(\phi(v, w) + \phi(w, v))$$

et

$$\phi_a(v, w) = \frac{1}{2}(\phi(v, w) - \phi(w, v)).$$

On vérifie facilement que ϕ_s (resp. ϕ_a) est une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique).

Les notions de formes antisymétriques et de formes alternées coïncident, en effet on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. *Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} inclut dans \mathbb{C} , alors une forme bilinéaire ϕ sur E est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.*

PREUVE. Pour tout $v, w \in E$, la bilinéarité de ϕ permet d'écrire :

$$\phi(v + w, v + w) = \phi(v, v) + \phi(w, w) + \phi(v, w) + \phi(w, v)$$

Si ϕ est alternée alors pour tout $v, w \in E$, on a :

$$\phi(v + w, v + w) = \phi(v, v) = \phi(w, w) = 0.$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, on en déduit : $\phi(v, w) = -\phi(w, v)$, donc ϕ est antisymétrique.

Réciproquement, supposons ϕ antisymétrique, alors pour tout $(u, v) \in E^2$ on a : $\phi(v, w) + \phi(w, v) = 0$, en particulier pour $v = w$ on obtient : $2\phi(v, v) = 0$, et donc $\phi(v, v) = 0$. \square

REMARQUE 2.1. L'hypothèse sur le corps est nécessaire pour la fin de la preuve. En effet il existe des corps pour lesquels $2x = 0$ n'implique pas $x = 0$. Par exemple, vous avez vu que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un corps et dans celui-ci on a $2\bar{1} = 0$. Le résultat ci-dessus n'est donc pas vrai en toute généralité.

Nous noterons $\text{Sym}(E)$, (resp. $\text{Antisym}(E)$), l'ensemble des formes bilinéaires symétriques, (resp. alternée).

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. *Les ensembles $\text{Sym}(E)$ et $\text{Antisym}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\text{Bil}(E)$ des formes bilinéaires sur E . De plus on a :*

$$\text{Bil}(E) = \text{Sym}(E) \oplus \text{Antisym}(E).$$

PREUVE. Nous montrons uniquement la dernière assertion. Si ϕ est symétrique et antisymétrique alors pour tout $v, w \in E$, $\phi(v, w) = \phi(w, v) = -\phi(w, v)$ soit $\phi(w, v) = 0$, ϕ est la forme nulle et $\text{Sym}(E) \cap \text{Antisym}(E) = \{0\}$.

Soit ϕ une forme bilinéaire, on peut décomposer : $\phi = \phi_s + \phi_a$ en posant comme dans l'exemple 2.1.(vii) :

$$\phi_s(v, w) = \frac{1}{2}(\phi(v, w) + \phi(w, v))$$

et

$$\phi_a(v, w) = \frac{1}{2}(\phi(v, w) - \phi(w, v)).$$

La forme ϕ_s est symétrique et la forme ϕ_a est antisymétrique. On a donc $\text{Bil}(E) = \text{Sym}(E) + \text{Antisym}(E)$. \square

L'étude des formes bilinéaires se ramène donc à l'étude des formes bilinéaires symétriques et antisymétriques. Nous allons ici nous intéresser essentiellement aux formes

symétriques. Cependant, certaines des notions présentées dans la suite peuvent être définies pour toutes les formes bilinéaires.

Nous allons commencer par associer à une forme bilinéaire symétrique sur E , une application linéaire de E dans son dual. Cette application détermine complètement la forme bilinéaire.

DÉFINITION 2.3. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E , on définit une application linéaire, noté I_ϕ de E dans E^* en associant à tout vecteur $v \in E$, la forme linéaire : $I_\phi(v)(w) = \phi(v, w)$.

L'application I_ϕ n'est pas quelconque. En effet, la symétrie de la forme bilinéaire ϕ va se traduire par une propriété de symétrie sur I_ϕ que nous allons préciser.

Si f est une application linéaire de E dans E^* , alors sa transposée est une application linéaire de E^{**} dans E^* . On peut comparer f et ${}^t f$ via l'isomorphisme canonique J_E entre E et son bidual E^{**} .

DÉFINITION 2.4. Soit f une application linéaire de E dans E^* , on dit que f est symétrique si on a la relation suivante entre f et sa transposée : $f = {}^t f \circ J_E$.

On peut maintenant énoncer la proposition qui caractérise l'application I_ϕ .

PROPOSITION 2.3. (i) Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E , alors l'application linéaire I_ϕ est symétrique.

(ii) Réciproquement si f est une application linéaire de E dans E^* symétrique, on peut définir une forme bilinéaire symétrique en posant $\phi_f(v, w) = f(v)(w)$.

PREUVE. Soit v, w deux vecteurs quelconques de E , alors d'une part, puisque ϕ est symétrique : $\langle w, I_\phi(v) \rangle = \langle v, I_\phi(w) \rangle$.

D'autre part, d'après les propriétés de J_E on a : $\langle w, I_\phi(v) \rangle = \langle I_\phi(v), J_E(w) \rangle$ (voir la remarque 1.2). Le premier crochet est le crochet de dualité sur $E \times E^*$ et le deuxième crochet est le crochet de dualité sur $E^* \times E^{**}$.

En utilisant la propriété de la transposée on obtient : $\langle I_\phi(v), J_E(w) \rangle = \langle v, {}^t I_\phi \circ J_E(w) \rangle$. Donc pour tout $v, w \in E$, on a : $\langle v, I_\phi(w) \rangle = \langle v, {}^t I_\phi \circ J_E(w) \rangle$, ce qui permet de conclure. Pour le deuxième point : la linéarité de f implique la bilinéarité de ϕ_f , la symétrie de f implique la symétrie de ϕ par un calcul similaire à ci-dessus. \square

Nous allons maintenant définir deux objets associés à une forme bilinéaire symétrique : le noyau et la matrice de ϕ .

DÉFINITION 2.5. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E , le noyau de ϕ est l'ensemble suivant : $\{v \in E \mid \forall w \in E, \phi(v, w) = 0\}$.

REMARQUE 2.2. Le noyau de ϕ est en fait le noyau de l'application linéaire I_ϕ , c'est donc un sous-espace vectoriel de E .

DÉFINITION 2.6. Si ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E , on définit le rang de ϕ (qui sera noté $\text{rg}(\phi)$) le rang de l'application linéaire I_ϕ .

EXEMPLE 2.2. Soit ϕ la forme bilinéaire définie dans l'exemple 2.1.(v) ; son noyau est la droite engendrée par le vecteur $(0, 0, 1)$. Son rang est égal à 2.

DÉFINITION 2.7. Si le noyau d'une forme bilinéaire ϕ est réduit à 0, on dit que ϕ est *non dégénérée*.

REMARQUE 2.3. **Attention** : Si ϕ est une forme bilinéaire non dégénérée sur un espace E , ce n'est pas vrai que la restriction de ϕ à un sous-espace vectoriel F de E est non dégénérée. Par exemple, sur \mathbb{R}^2 la forme définie par $\phi((x, y), (x', y')) = xy' + x'y$ est non dégénérée mais la restriction de ϕ au sous-espace $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est la forme bilinéaire nulle.

2. Matrices d'une forme bilinéaire

DÉFINITION 2.8. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , on associe à ϕ une matrice carrée de taille n de coefficients (a_{ij}) définie par : $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$. On note cette matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

REMARQUE 2.4. (i) La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ n'est autre que la matrice de I_ϕ dans les bases \mathcal{B} et la base duale \mathcal{B}^* .

(ii) Par définition la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ est une matrice symétrique (égale à sa transposée).

La matrice dans la base canonique de la forme bilinéaire définie dans l'exemple 2.1.(v) est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

DÉFINITION 2.9. Nous noterons $\text{Sym}_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées de taille n symétriques.

Il est clair que la correspondance entre ϕ et sa matrice est linéaire. D'autre part, on peut retrouver ϕ à partir de sa matrice. En effet, si v (resp. w) est un vecteur tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = {}^t(v_1, \dots, v_n)$ (resp. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = {}^t(w_1, \dots, w_n)$) alors en utilisant la propriété de bilinéarité de ϕ , on a :

$$(2.1) \quad \phi(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i \phi(e_i, e_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (v_i w_j + v_j w_i) \phi(e_i, e_j).$$

Si on récapitule, on a donc la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. *L'application qui à toute forme bilinéaire $\phi \in \text{Sym}(E)$ fait correspondre sa matrice $A_\phi \in \text{Sym}_n(\mathbb{K})$ est une application linéaire bijective.*

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.1. *Si E est un espace vectoriel de dimension n , alors l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

PREUVE. Il suffit de calculer la dimension de l'espace des matrices symétriques qui est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$. \square

Voici comment obtenir ϕ à partir de sa matrice et comment est modifiée la matrice de ϕ lorsqu'on change de base.

PROPOSITION 2.5. *Soient E un espace vectoriel, \mathcal{B} une base de E , ϕ une forme bilinéaire symétrique, alors pour tout $(v, w) \in E^2$, on a :*

$$\phi(v, w) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(w).$$

Si \mathcal{C} est une base de E , alors on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

PREUVE. La première assertion découle de l'égalité 2.1. Pour la deuxième, on interprète la matrice de ϕ comme la matrice de l'application linéaire Id_ϕ de E dans E^* , on obtient alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}}(I_\phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*}(\text{Id}_{E^*}) \text{Mat}_{\mathcal{C}^*, \mathcal{C}}(I_\phi) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_E).$$

Il suffit de remarquer ensuite que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*}(\text{Id}_{E^*}) = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$. \square

DÉFINITION 2.10. Si ϕ est une forme bilinéaire sur E , alors le déterminant de la matrice de ϕ dans une base \mathcal{B} de E s'appelle le *discriminant* de ϕ dans \mathcal{B} .

REMARQUE 2.5. Le discriminant n'est pas invariant par changement de base. En effet, si le discriminant de ϕ vaut D dans une base \mathcal{B} alors il devient $D' = (\det P)^2 \cdot D$ dans la base \mathcal{B}' ou P est la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$. Par contre si ce discriminant est non nul il restera non nul dans toutes les bases. Dans ce cas, le noyau est réduit à 0 et la forme est non dégénérée.

3. Orthogonalité

Nos allons définir une notion d'orthogonalité relative à ϕ . Cette notion d'orthogonalité et les propriétés liées seront similaires aux propriétés équivalentes pour la notion d'orthogonalité définie par le crochet de dualité.

DÉFINITION 2.11. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E ;

- (i) On dit que $u, v \in E$ sont orthogonaux pour ϕ (ou ϕ -orthogonaux) si $\phi(u, v) = 0$.
- (ii) Si X est une partie de E , on définit l'orthogonal de X relativement à ϕ :

$$X^{\perp\phi} = \{v \in E \mid \forall w \in X \phi(v, w) = 0\}.$$

REMARQUE 2.6. la notion d'orthogonalité dépend bien évidemment de la forme bilinéaire ϕ , cependant parfois, par souci de simplification, la forme bilinéaire ϕ est sous-entendue et l'orthogonal de F sera noté F^\perp . Dans ce cas il ne faudra pas confondre l'orthogonal au sens de la dualité (qui est un sous-espace du dual) et l'orthogonal par rapport à ϕ .

Les propriétés de l'orthogonal d'une partie sont rassemblées dans la proposition qui suit.

PROPOSITION 2.6. (i) L'ensemble $X^{\perp\phi}$ est un sous-espace vectoriel de E ;

(ii) Si $X_1 \subset X_2 \subset E$, alors $X_2^{\perp\phi} \subset X_1^{\perp\phi}$;

(iii) Si F est le sous-espace vectoriel de E engendré par X alors on a l'égalité : $F^{\perp\phi} = X^{\perp\phi}$;

(iv) Si F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de E^*), on a l'égalité suivante : $\dim F + \dim F^{\perp\phi} = \dim E + \dim(\ker(\phi) \cap F)$;

(v) Si F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de E^*), alors on a : $F \subset (F^{\perp\phi})^{\perp\phi}$.

PREUVE. Nous ne montrerons que le point (iv), pour les autres points, on peut s'inspirer de la preuve de la proposition 1.9 concernant l'orthogonalité au sens de la dualité.

D'abord, en écrivant les définitions on constate que l'orthogonal au sens de la dualité de $I_\phi(F)$ est égal à l'orthogonal relativement à ϕ de F , c'est à dire ${}^\perp I_\phi(F) = F^{\perp\phi}$.

Ensuite d'après les propriétés de l'orthogonalité au sens de la dualité (proposition 1.9), on a l'égalité : $\dim I_\phi(F) + \dim {}^\perp I_\phi(F) = \dim E$, et donc $\dim I_\phi(F) + \dim F^{\perp\phi} = \dim E$.

D'autre part, en considérant la restriction de I_ϕ à F et en appliquant le théorème du rang, on obtient : $\dim F = \dim \ker(I_{\phi|_F}) + \dim(I_{\phi|_F}(F))$.

On obtient donc $\dim F + \dim F^{\perp\phi} = \dim E + \dim(\ker(I_{\phi|_F}))$. Mais par définition $\ker(I_{\phi|_F}) = \ker(\phi) \cap F$. \square

EXEMPLE 2.3. Le noyau de ϕ n'est rien d'autre que l'orthogonal de E .

4. Vecteur et cône isotrope

DÉFINITION 2.12. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E .

- (i) Un vecteur $v \in E$ est isotrope si $\phi(v, v) = 0$.
- (ii) Un sous-espace H de E est isotrope si $H \cap H^{\perp\phi}$ est non réduit à 0.
- (iii) Un sous-espace H est totalement isotrope si $H \subset H^{\perp\phi}$.

REMARQUE 2.7. (i) L'ensemble des vecteurs isotropes n'est pas un sous-espace vectoriel car il n'est pas stable par addition. Par contre cet ensemble est stable par homothétie ; un ensemble stable par homothétie est appelé un cône. L'ensemble des vecteurs isotropes est donc appelé le cône isotrope.

- (ii) Par définition le noyau est contenu dans le cône isotrope, mais en général ces deux ensembles sont distincts.
- (iii) D'après la remarque 2.3, le noyau de ϕ restreint à H est égal à $H \cap H^{\perp\phi}$. On en déduit que le sous-espace H est non isotrope si et seulement si la restriction de ϕ à H est non dégénérée. Dans ce cas, d'après la proposition 2.6, on a $\dim H + \dim H^{\perp\phi} = \dim E$ et donc $E = H \oplus H^{\perp\phi}$.
- (iv) Le sous-espace H est totalement isotrope si et seulement si la restriction de ϕ à H est nulle.

EXEMPLE 2.4. Reprenons l'exemple 2.1.(v) : $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - yy'$ définie sur \mathbb{R}^3 . Le cône isotrope est l'union de deux plans suivants :

$$H_1 = \{(x, y, z) \mid x = y\} \text{ et } H_2 = \{(x, y, z) \mid x = -y\}.$$

Ce cône contient strictement le noyau de ϕ qui est la droite engendrée par le vecteur $(0, 0, 1)$.

5. Formes quadratiques

DÉFINITION 2.13. Une application q de E dans \mathbb{K} est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire ϕ telle que pour tout $v \in E$, $q(v) = \phi(v, v)$. L'ensemble des formes quadratiques sera noté $Q(E)$.

Un calcul simple (mais fondamental) montre les égalités suivantes :

$$q(v + w) = q(v) + q(w) + 2\phi(v, w) \text{ et } q(v - w) = q(v) + q(w) - 2\phi(v, w).$$

On en déduit immédiatement que :

$$(5.1) \quad \phi(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w)) = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w)).$$

L'une ou l'autre des égalités ci-dessus montre que la forme bilinéaire ϕ associée à q est unique, on appelle ϕ la *forme polaire* de q .

L'unicité de la forme polaire ϕ permet d'énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.7. *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}(E) & \rightarrow & Q(E) \\ \phi & \mapsto & q_\phi \end{array}$$

(où q_ϕ est l'application définie par $q_\phi(v) = \phi(v, v)$) est un isomorphisme d'espace vectoriel.

REMARQUE 2.8. La correspondance entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques étant bijective, tous les objets définis pour une forme bilinéaire ϕ peuvent être rattachés à la forme q , on pourra parler donc de la matrice, du noyau, du rang, etc d'une forme quadratique.

La proposition suivante précise la relation entre forme quadratique et forme bilinéaire et sera montrée en TD.

PROPOSITION 2.8. *Soit q une application de E dans \mathbb{K} et ϕ, ϕ' les applications définies par $\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$ et $\phi'(u, v) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w))$. On a équivalence entre les assertions suivantes :*

- (i) *L'application q est une forme quadratique.*
- (ii) *L'application ϕ (ou ϕ') est bilinéaire et quelque soit $v \in E$, $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$.*
- (iii) *L'application ϕ (ou ϕ') est bilinéaire et quelque soit $v \in E$, $q(2v) = 4q(v)$.*

6. Bases orthogonales et orthonormales

On veut définir des bases adaptées à une forme bilinéaire ϕ .

DÉFINITION 2.14. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E .

- (i) On dit que \mathcal{F} est une famille orthogonale pour ϕ , si pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ distincts, on a : $\phi(v_i, v_j) = 0$
- (ii) On dit que \mathcal{F} est une famille orthonormale (ou orthonormée) pour ϕ si pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $\phi(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$.

PROPOSITION 2.9. *Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale composée de vecteurs non isotropes, alors \mathcal{F} est libre.*

PREUVE. Supposons qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a alors :

$$\phi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i) = 0.$$

Soit $\lambda_i \phi(v_i, v_i) = 0$, mais comme v_i est non isotrope, on conclut que $\lambda_i = 0$. □

Nous allons maintenant voir qu'il existe toujours une base orthogonale.

THÉORÈME 2.10. *Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E , alors il existe une base orthogonale pour ϕ .*

PREUVE. Si la forme ϕ est nulle alors toute base est orthogonale, nous allons donc supposer que ϕ n'est pas nulle.

La suite de la preuve se fait par récurrence sur la dimension de E . Si E est de dimension 1, alors toute base est orthogonale; supposons donc qu'il existe une base orthogonale

pour toute forme bilinéaire sur un espace de dimension au plus $n - 1$. Soit E un espace de dimension n et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E . Comme ϕ est non nulle, la forme quadratique associée q est non nulle, donc il existe $v \in E$, non nul tel que $q(v) \neq 0$. La droite $D = \mathbb{K}v$ engendrée par v est non isotrope, donc d'après la remarque 2.7.(iii), E se décompose en somme directe : $E = \mathbb{K}v \oplus (\mathbb{K}v)^\perp$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthogonale (v_2, \dots, v_n) pour la restriction de ϕ à $(\mathbb{K}v)^\perp$. La famille (v, v_2, \dots, v_n) est une base de E qui est orthogonale pour ϕ . \square

EXEMPLE 2.5. Par contre il n'existe pas toujours de base orthonormale, même si la forme est non dégénérée.

Nous énonçons maintenant une version relative à ϕ du théorème de la base incomplète.

PROPOSITION 2.11. *Soit ϕ une forme bilinéaire sur E de dimension n et soient (v_1, v_2, \dots, v_p) , une famille orthogonale de vecteurs non isotropes pour ϕ , alors il existe des vecteurs v_{p+1}, \dots, v_n de E tels que (v_1, v_2, \dots, v_n) soit une base orthogonale de E .*

PREUVE. D'après la proposition 2.9 la famille (v_1, v_2, \dots, v_p) est libre. Soit F l'espace vectoriel engendré par v_1, v_2, \dots, v_p . La restriction de ϕ à F est une forme bilinéaire notée $\phi|_F$. La famille (v_1, v_2, \dots, v_p) est une base orthogonale de F . Puisque pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ le vecteur v_i est non isotrope $\phi(v_i, v_i) \neq 0$ et la forme $\phi|_F$ est non dégénérée. Et donc d'après la remarque 2.7.(iii) F est non isotrope et $E = F \oplus F^\perp$. On applique le théorème 2.10 à $\phi|_{F^\perp}$: on obtient une base (v_{p+1}, \dots, v_n) de F^\perp orthogonale pour la forme $\phi|_{F^\perp}$. La base (v_1, v_2, \dots, v_n) est alors une base de E orthogonale pour la forme ϕ . \square

7. Réduction de Gauss

DÉFINITION 2.15. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. Une réduction en carré de q est une identité (comme fonction sur E) :

$$q = \lambda_1 \psi_1^2 + \lambda_2 \psi_2^2 + \dots + \lambda_p \psi_p^2,$$

où ψ_1, \dots, ψ_p sont des formes linéaires *indépendantes*.

La proposition suivante montre qu'il est équivalent de se donner une décomposition en carré ou de se donner une base de E orthogonale ϕ . On en déduit qu'une décomposition en carré existe toujours, par contre elle n'est pas unique.

PROPOSITION 2.12. *Soit q une forme quadratique sur E ; il existe une bijection entre l'ensemble des décompositions en carré pour q et l'ensemble des bases de E orthogonales pour q .*

PREUVE. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E orthogonale pour q . Alors si v est un vecteur de coordonnées (v_1, \dots, v_n) dans la base \mathcal{B} , on peut écrire :

$$q(v) = q(e_1)v_1^2 + \dots + q(e_n)v_n^2.$$

Soit $\mathcal{B}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ la base duale de \mathcal{B} , alors comme $\psi_i(v) = v_i$, l'égalité ci-dessus est bien une décomposition en carré :

$$q(v) = q(e_1)\psi_1^2(v) + \dots + q(e_n)\psi_n^2(v).$$

Réciproquement donnons nous une décomposition en carré : $q = \lambda_1 \psi_1^2 + \lambda_2 \psi_2^2 + \dots + \lambda_p \psi_p^2$. Comme ψ_1, \dots, ψ_p sont des formes linéaires indépendantes, on peut compléter la famille (ψ_1, \dots, ψ_p) en une base de E^* : $\mathcal{B}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, (où n est la dimension de E). On vérifie immédiatement que la base antédual $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathcal{B}^* est une base orthogonale pour ϕ . \square

COROLLAIRE 2.2. *Soit q une forme quadratique sur E , alors il existe une décomposition en carré $q = \lambda_1 \psi_1^2 + \lambda_2 \psi_2^2 + \dots + \lambda_p \psi_p^2$. De plus, le nombre de i tels que $\lambda_i \neq 0$ est égal au rang de q .*

Pour conclure cette deuxième partie, nous allons expliquer un procédé algorithmique pour trouver une réduction en carré d'une forme quadratique. C'est le procédé de réduction de Gauss.

ALGORITHME DE GAUSS

Entrée : le couple (q, q_c) ou q est la forme quadratique à réduire et q_c est la forme nulle sur un espace E de dimension n .

Si q est nulle, alors aller à la **Sortie**.

Tant que q est non nulle, faire :

Début On considère la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de q dans une base \mathcal{B} ; si v est un vecteur de coordonnées (v_1, \dots, v_n) , alors on a :

$$q(v) = \sum_{i=1}^n a_{ii} v_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} v_i v_j.$$

S'il n'existe pas de $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_{ii} \neq 0$ aller au cas 2.

cas 1 il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $a_{ii} \neq 0$, en permutant éventuellement les vecteurs de la base \mathcal{B} , on suppose que $a_{11} \neq 0$. On peut alors écrire :

$$q(v) = a_{11}(v_1^2 + 2v_1\varphi(v)) + q'(v)$$

où φ est q' sont des formes sur E qui ne dépendent pas de v_1 . On pose alors $\psi_1(v) = v_1 + \varphi(v)$ et $q''(v) = q'(v) - a_{11}\varphi^2(v)$. On obtient alors :

$$q(v) = a_{11}\psi_1^2 + q''(v).$$

On pose alors $q_c := q_c + a_{11}\psi_1^2$, $q := q''$; aller à fin.

REMARQUE 2.9. S'il existe une réduction en carré de $q''(v)$:

$$q'' = \lambda_1 \chi_1^2 + \lambda_2 \chi_2^2 + \dots + \lambda_{p'} \chi_{p'}^2,$$

avec les $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p'}$ p' formes linéairement indépendantes alors comme $q''(v)$ ne dépend pas de v_1 , les χ_i non plus et les formes $\psi_1, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p'}$ sont linéairement indépendantes.

cas 2 Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{ii} = 0$, alors comme la forme n'est pas nulle, il existe $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($i \neq j$) tels que $a_{ij} \neq 0$. En permutant les vecteurs de \mathcal{B} on peut supposer que $a_{12} \neq 0$.

On écrit alors :

$$q(v) = a_{12}v_1v_2 + a_{12}v_1\varphi_1 + a_{12}v_2\varphi_2 + q'(v)$$

où φ_1, φ_2 et $q'(v)$ sont des formes qui ne dépendent ni de v_1 ni de v_2 . On écrit alors :

$$q(v) = a_{12}(\varphi_1(v_1 + \varphi_2(v)))(v_2 + \varphi_1(v)) + q'(v) - a_{12}\varphi_1\varphi_2(v).$$

On utilise maintenant l'identité suivante : pour tout $x, y \in \mathbb{K}$, $xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2)$, ce qui permet d'écrire :

$$q(v) = \frac{a_{12}}{4}[\psi_1^2(v) - \psi_2^2(v)] + q''(v)$$

où $\psi_1(v) = v_1 + \varphi_2(v) + v_2 + \varphi_1(v)$, $\psi_2 = v_1 + \varphi_2(v) - v_2 - \varphi_1(v)$ et $q''(v) = q'(v) - a_{12}\varphi_1\varphi_2(v)$ est une forme quadratique qui ne dépend ni de v_1 ni de v_2 . On pose alors $q_c := q_c + \frac{a_{12}}{4}(\psi_1^2(v) - \psi_2^2(v))$, $q := q''$; aller à fin.

REMARQUE 2.10. Remarquons que les deux formes ψ_1 et ψ_2 sont linéairement indépendantes (elles le sont si on les restreint sur $\text{vect}(e_1, e_2)$). S'il existe une réduction en carré de $q''(v)$:

$$q'' = \lambda_1\chi_1^2 + \lambda_2\chi_2^2 + \dots + \lambda_{p'}\chi_{p'}^2,$$

avec les $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p'}$ linéairement indépendantes alors comme $q''(v)$ ne dépendent ni de v_1 ni de v_2 , les χ_i ne dépendent pas non plus de v_1 et v_2 . Les formes $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{p'}$ sont donc linéairement indépendantes.

fin

sortie : la forme quadratique q_c qui est une réduction en carré de la forme quadratique initiale q .

Comme à chaque boucle le nombre de variables dans l'expression de q diminue d'au moins un, l'algorithme ci-dessus produit une décomposition en carré de q en au plus n étapes. D'autre part d'après les remarques 2.9 et 2.10 les formes linéaires obtenues sont linéairement indépendantes.

8. Formes bilinéaires symétriques réelles

Dans toute cette partie E sera un espace vectoriel *réel* de dimension fini.

Soit E un espace vectoriel réel et soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E . On a vu dans la partie précédente qu'il existait une base orthogonale pour ϕ . Sur \mathbb{R} , on peut obtenir un peu plus.

DÉFINITION 2.16. Soit E un espace vectoriel, ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E et q sa forme quadratique associée. Une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est dite orthogonale réduite si \mathcal{B} est orthogonale et si de plus pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $q(e_i) \in \{-1, 0, 1\}$.

PROPOSITION 2.13. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E , alors il existe une base de E orthogonale réduite.

PREUVE. On sait déjà qu'il existe une base orthogonale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E . Il suffit de poser $e_i = \sqrt{|q(e'_i)|}^{-1} e'_i$ si $q(e'_i) \neq 0$ et $e_i = e'_i$ si $q(e'_i) = 0$ pour obtenir une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthogonale réduite. \square

Si ϕ est une forme bilinéaire sur E , on peut se demander si il existe une base orthonormée. Si on part d'une base orthogonale : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, la première obstruction est l'existence possible de vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$. Si on suppose que ϕ est non dégénérée, et si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base orthogonale, alors $q(e_i) \neq 0$. Il reste alors une deuxième obstruction : il peut exister des vecteurs e_i tels que $q(e_i) < 0$. Si tel est le

cas, il n'existe pas de base orthonormée, en effet on va montrer que le nombre de i tels que $q(e_i) < 0$ est indépendant de la base orthogonale choisie.

Dans la situation ci-dessus, nous poserons $r_{\mathcal{B}} = \text{card}\{i \mid q(e_i) > 0\}$ et $s_{\mathcal{B}} = \text{card}\{i \mid q(e_i) < 0\}$. Remarquons que la somme $r_{\mathcal{B}} + s_{\mathcal{B}}$ n'est autre que le rang de ϕ . Cette somme est donc indépendante de la base \mathcal{B} . En fait, les deux nombres $r_{\mathcal{B}}$ et $s_{\mathcal{B}}$ sont indépendants de la base \mathcal{B} par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.14. Théorème d'inertie de Sylvester

Soit E un espace vectoriel réel et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E . Soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' deux bases orthogonales, alors on a les égalités : $r_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}'}$ et $s_{\mathcal{B}} = s_{\mathcal{B}'}$.

PREUVE. On a remarqué que $r_{\mathcal{B}} + s_{\mathcal{B}}$ est indépendant de \mathcal{B} , il suffit de montrer que $r_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}'}$; l'inégalité $r_{\mathcal{B}} \leq r_{\mathcal{B}'}$ suffit, l'inégalité inverse étant obtenue en permutant \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Pour montrer cette inégalité considérons les espaces suivants :

$$(E_{>0})_{\mathcal{B}} = \text{vect}\{e_i \mid q(e_i) > 0\}$$

et

$$(E_{\leq 0})_{\mathcal{B}'} = \text{vect}\{e'_i \mid q(e'_i) \leq 0\}$$

où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

Par définition, on a alors $\dim(E_{>0})_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}}$ et $\dim(E_{\leq 0})_{\mathcal{B}'} = n - r_{\mathcal{B}'}$. D'autre part si $v \in (E_{>0})_{\mathcal{B}}$ est non nul, on a $q(v) > 0$ et si $v \in (E_{\leq 0})_{\mathcal{B}'}$ alors $q(v) \leq 0$. L'intersection $(E_{>0})_{\mathcal{B}} \cap (E_{\leq 0})_{\mathcal{B}'}$ est donc réduite à l'origine. On en déduit l'inégalité :

$$\dim(E_{>0})_{\mathcal{B}} + \dim(E_{\leq 0})_{\mathcal{B}'} \leq \dim E.$$

Ce qui est équivalent à $r_{\mathcal{B}} - r_{\mathcal{B}'} \leq 0$ ce qui conclut la preuve. \square

DÉFINITION 2.17. On se place dans les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente. On appelle *signature* de ϕ (ou de la forme quadratique associée q), le couple (r, s) tel que pour toute base orthogonale \mathcal{B} , $r = r_{\mathcal{B}}$ et $s = s_{\mathcal{B}}$.

Nous allons introduire une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes bilinéaires symétriques, puis nous montrerons que la signature détermine complètement la classe d'équivalence.

Rappelons d'abord la définition d'une relation d'équivalence.

EXEMPLE 2.6. Soit X un ensemble, une relation \sim sur X est la donnée d'une partie du produit $X \times X$. Si le couple (x, y) est dans cette partie, on dit que x est en relation avec y et on note $x \sim y$. Une relation est une relation d'équivalence, si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) *réflexivité* pour tout $x \in X$ $x \sim x$;
- (ii) *symétrie* pour tout couple (x, y) , si $x \sim y$, alors $y \sim x$;
- (iii) *transitivité* pour tout triplet (x, y, z) si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

REMARQUE 2.11. (i) Le premier exemple de relation d'équivalence est bien sur l'égalité entre deux éléments d'un ensemble.

- (ii) Soit k un entier positif, on définit sur \mathbb{Z} la relation suivante $p \sim q$ si $p - q$ est divisible par k . On vérifie que cette relation est une relation d'équivalence.

Nous allons définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.

DÉFINITION 2.18. Soit E un espace vectoriel et soient ϕ, ϕ' deux formes bilinéaires symétriques, on dit que $\phi \sim \phi'$ s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ bijective telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, on ait : $\phi(v, w) = \phi'(f(v), f(w))$.

PROPOSITION 2.15. *La relation définie dans la proposition précédente est une relation d'équivalence.*

PREUVE. Pour tout ϕ , on a $\phi \sim \phi$ en considérant $f = \text{Id}_E$, ce qui montre que la relation est réflexive.

Supposons que $\phi \sim \phi'$, il existe donc $f \in \mathcal{L}(E)$ bijective telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, $\phi(v, w) = \phi'(f(v), f(w))$. Mais puisque f est bijective, elle admet un inverse, et on a donc pour $(v, w) \in E^2$, $\phi(f^{-1}(v), f^{-1}(w)) = \phi'(v, w)$, ce qui montre que la relation est symétrique.

Supposons maintenant que $\phi \sim \phi'$ et $\phi' \sim \phi''$, il existe donc f et g deux applications linéaires inversibles telles que, pour tout $(v, w) \in E^2$, $\phi(v, w) = \phi'(f(v), f(w))$ et $\phi'(v, w) = \phi''(g(v), g(w))$, mais alors pour tout (v, w) , on a :

$$\phi(v, w) = \phi''(g(f(v)), g(f(w))),$$

ce qui montre que la relation est transitive. \square

On va voir que deux formes bilinéaires sont en relation si et seulement si elles ont même matrice dans deux bases de E .

PROPOSITION 2.16. *Soit E un espace vectoriel et ϕ, ϕ' deux formes bilinéaires sur E , alors $\phi \sim \phi'$ si et seulement si il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E telles que \mathcal{B} orthogonale réduite pour ϕ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\phi'$.*

PREUVE. Supposons que $\phi \sim \phi'$, il existe donc $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, on ait : $\phi(v, w) = \phi'(f(v), f(w))$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E orthogonale réduite pour ϕ , on a donc l'identité matricielle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}f\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi'\text{Mat}_{\mathcal{B}}f.$$

Comme f est bijective la famille $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de E et de plus on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}f = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}\text{Id}_E$. Ce qui permet d'écrire :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}f\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi'\text{Mat}_{\mathcal{B}}f = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}\text{Id}_E\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi'\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\phi'.$$

\square

Nous allons voir que sur \mathbb{R} , la signature permet de décider si deux formes bilinéaires sont équivalentes ou pas. On dit que l'on a "classifié" les formes bilinéaires symétriques sur \mathbb{R} modulo la relation d'équivalence définie ci-dessus. On a en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 2.17. *Soit E un espace vectoriel réel et ϕ, ϕ' deux formes bilinéaires symétriques, alors $\phi \sim \phi'$ si et seulement si ϕ et ϕ' ont même signature.*

PREUVE. Si ϕ et ϕ' ont même signature, alors on sait qu'il existe une base orthogonale réduite \mathcal{B} pour ϕ et une base orthogonale réduite \mathcal{B}' pour ϕ' . En permutant éventuellement les vecteurs de \mathcal{B} , on aura $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\phi'$ et donc $\phi \sim \phi'$.

Réciproquement supposons $\phi \sim \phi'$. Il existe donc deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ orthogonale réduite telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\phi = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\phi'$. On en déduit immédiatement que ϕ et ϕ' ont même signature. \square

EXEMPLE 2.7. En dimension 2, il existe donc trois “classes” de formes bilinéaires symétriques *non dégénérées* : les formes de signature $(2, 0)$, les formes de signature $(1, 1)$ et les formes de signature $(0, 2)$.

Espaces euclidiens

Dans toute ce chapitre les espaces vectoriels seront réels et de dimension finie.

1. Formes bilinéaires positives et définies positives

DÉFINITION 3.1. Soit E un espace vectoriel, ϕ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée. On dit que q est positive si pour tout $v \in E$ $q(v) \geq 0$.

On dit que q est définie positive, si elle est positive et si de plus $q(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Voici une caractérisation des formes positives.

PROPOSITION 3.1. Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E , alors q est positive si et seulement si sa signature est $(r, 0)$.

PREUVE.

Soit q de signature $(r, 0)$; soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour q . Si (v_1, v_2, \dots, v_n) sont les coordonnées d'un vecteur v dans \mathcal{B} alors $q(v) = a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + \dots + a_n v_n^2$, où $a_i = q(e_i) \geq 0$ et donc $q(v) \geq 0$.

Réciproquement si q n'est pas de signature $(r, 0)$, il existe $v \in E$ tel que $q(v) < 0$ et q n'est pas positive. \square

Lorsque ϕ est positive le noyau de ϕ et le cône isotrope de ϕ sont confondus.

PROPOSITION 3.2. Soient E un espace vectoriel et ϕ une forme bilinéaire positive sur E . Notons \mathcal{C} , le cône isotrope de ϕ , on a égalité : $\mathcal{C} = \ker(\phi)$.

PREUVE. Rappelons (voir la remarque 2.7) que l'on a toujours l'inclusion : $\ker(\phi) \subset \mathcal{C}$. Soit $v \in \mathcal{C}$; choisissons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale réduite. On peut supposer que si $r = \text{rg}(\phi)$, $q(e_i) = 1$ pour $i \leq r$ et $q(e_i) = 0$ sinon. Décomposons v dans la base \mathcal{B} : $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, alors $q(v) = a_1^2 + \dots + a_r^2$. Mais comme $q(v) = 0$, on a $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ et v appartient à l'espace engendré par e_{r+1}, \dots, e_n qui est égal au noyau de ϕ . \square

Nous allons maintenant caractériser les formes quadratiques définies positives.

PROPOSITION 3.3. Soit E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur E . On a équivalence entre :

- (i) q est définie positive ;
- (ii) q est de signature $(n, 0)$;
- (iii) q est positive et non dégénérée ;
- (iv) q est positive et sans vecteurs isotropes non nuls.

PREUVE. Le point (i) implique (ii) se montre par la contraposée.

Si q est de signature $(n, 0)$ alors elle est non dégénérée. D'autre part, d'après la proposition 3.1, q est positive ce qui montre que (ii) implique (iii).

Si q est positive et non dégénérée, alors son noyau est réduit à zéro et donc d'après la proposition 3.2, son cône isotrope est réduit à 0 et q n'a pas de vecteur isotrope non nul, ce qui montre que (iii) implique (iv).

Par définition, le point (iv) implique (i) et la preuve est complète. \square

1.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Énonçons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous sera très utile pour montrer que l'application $v \mapsto \sqrt{q(v)}$ est une norme.

THÉORÈME 3.4. *Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique positive, alors on a :*

(i) *Pour tout $(v, w) \in E^2$, $\phi(v, w)^2 \leq q(v)q(w)$.*

(ii) *Si de plus ϕ est définie positive, alors $\phi(v, w)^2 = q(v)q(w)$ si et seulement si v et w sont colinéaires.*

PREUVE. Si $q(v) = 0$, alors d'après la proposition 3.2, $\phi(v, w)$ est nul également et donc l'inégalité est vérifiée. On est même toujours dans le cas d'égalité. Mais si q est définie positive, alors $v = 0$ et v et w sont toujours colinéaires. On a donc montré (i) et (ii) dans le cas où $q(v) = 0$.

Supposons maintenant que $q(v) \neq 0$. Comme q est positive, pour tout $(v, w) \in E^2$, $q(\lambda v + w) \geq 0$. Mais $q(\lambda v + w) = \lambda^2 q(v) + 2\lambda \phi(v, w) + q(w)$ est un polynôme de degré 2 en λ . Son discriminant réduit est négatif ou nul, ce qui nous donne : $\phi(v, w)^2 - q(v)q(w) \leq 0$ ce qui montre le point (i).

Montrons le point (ii). Supposons donc que $\phi(v, w)^2 = q(v)q(w)$, alors le discriminant du polynôme $\lambda^2 q(v) + 2\lambda \phi(v, w) + q(w)$ est nul, il admet donc une racine double λ_0 . On en déduit $q(\lambda_0 v + w) = 0$ et comme q est définie positive, on a $\lambda_0 v + w = 0$ et v et w sont proportionnels. La réciproque étant évidente, la preuve du théorème est complète. \square

2. Espace euclidien ; premières propriétés

Nous allons maintenant définir la notion d'espace euclidien.

DÉFINITION 3.2. Un espace euclidien est la donnée d'un couple (E, ϕ) , où E est un espace vectoriel réel de dimension finie et ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .

Une forme bilinéaire symétrique définie positive est appelée un produit scalaire. Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la notation suivante : $\phi(v, w) = (v|w)$. On peut rencontrer également la notation : $\phi(v, w) = v.w$.

EXEMPLE 3.1. (i) Soit $E = \mathbb{R}^n$, alors la forme bilinéaire : $(v|w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ est définie positive. L'espace $(\mathbb{R}^n, (.|.))$ est donc un espace euclidien. Il est facile de vérifier que la base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormée pour ce produit. Ce produit scalaire est appelé le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n .

- (ii) Soit $E = \mathbb{R}[X]_n$ l'espace des polynômes de degré au plus n ; on montrera en TD que la forme bilinéaire définie par :

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

est un produit scalaire.

2.1. Norme induite. Rappelons les définitions d'une distance sur un ensemble quelconque et de norme sur un espace vectoriel.

DÉFINITION 3.3. Soit X un ensemble, une distance sur X est une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- (i) pour tout $(x, y) \in X^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) pour tout $(x, y) \in X^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) pour tout $(x, y, z) \in X^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Le troisième axiome s'appelle l'inégalité triangulaire.

DÉFINITION 3.4. Soit E un espace vectoriel réel, une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- (i) $N(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.
- (ii) Pour tout $v \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda v) = |\lambda|N(v)$.
- (iii) Pour tout $(v, w) \in E^2$, $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$

REMARQUE 3.1. Si E est muni d'une norme N , on dit que E est un espace vectoriel normé. On peut alors munir E d'une distance en posant $d(v, w) = N(v - w)$.

NOTATION 3.1. Puisque ϕ est positive, pour tout $v \in E$, $q(v) \geq 0$, on peut donc définir $\|v\| = \sqrt{q(v)}$.

Nous allons voir qu'un espace euclidien est normé :

PROPOSITION 3.5. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien alors l'application $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ définit une norme sur E .

PREUVE. Comme $(v|v)$ est positif, l'expression $\sqrt{(v|v)}$ est bien définie. Vérifions maintenant les trois axiomes définissant une norme.

Pour le premier point : supposons que $\|v\| = 0$, alors $(v|v) = 0$ ce qui implique que $v = 0$ puisque le produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive. La réciproque est immédiate. Pour le deuxième point, calculons :

$$\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v|\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2(v|v)} = |\lambda| \|v\|$$

Enfin le troisième point se déduit du théorème 3.4. Pour tout v , $\|v\|$ est positif, il suffit donc de montrer que pour tout $(v, w) \in E^2$: $\|v + w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$. Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= q(v + w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\phi(v, w) \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\phi(v, w)| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| \\ &\leq (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité se déduisant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 3.4). \square

On peut s'intéresser au cas d'égalité.

PROPOSITION 3.6. *Pour tout $(v, w) \in E^2$, $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ si et seulement si v et w sont positivement proportionnels.*

PREUVE. Si $w = 0$, alors l'équivalence est immédiate. Supposons donc $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$, on en déduit : $\phi(v, w) = \|v\| \|w\|$. D'après le cas d'égalité du théorème 3.4 $v = \lambda w$. Mais alors $\|\lambda w + w\| = |1 + \lambda| \|w\|$ alors que $\|\lambda w\| + \|w\| = (|\lambda| + 1) \|w\|$ et donc $|1 + \lambda| = |\lambda| + 1$ ce qui impose $\lambda \geq 0$. la réciproque est immédiate. \square

Si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien alors la norme induite vérifie l'identité du parallélogramme, c'est à dire que pour tout $(v, w) \in E^2$, on a :

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

En exercice on montrera l'équivalence suivante :

THÉORÈME 3.7. *Soit E un espace vectoriel réel et $\|\cdot\|$ une norme sur E , alors cette norme est induite par un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.*

2.2. Bases orthonormées et coordonnées. Si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E . Dans une telle base, les coordonnées d'un vecteur et les coefficients de la matrice d'une application linéaire s'expriment simplement :

PROPOSITION 3.8. *Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E et f une application linéaire, alors*

$$v = \sum_{i=1}^n (v|v_i) v_i$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = ((f(v_j)|v_i)).$$

PREUVE. La base \mathcal{B} est orthonormée et donc : $(v_i|v_j) = \delta_{ij}$. Si $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ est la décomposition de v sur la base \mathcal{B} , on a alors $(v|v_i) = a_i$ ce qui montre la première égalité. Pour la deuxième égalité, rappelons que le coefficient de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ à la i -ème ligne et j -ième colonne est égal à la coordonnée sur v_i de $f(v_j)$. \square

A). *Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.* A partir d'une base quelconque d'un espace vectoriel, nous allons définir une unique base orthonormée vérifiant certaines propriétés.

THÉORÈME 3.9. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien ; soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E ; il existe une unique base orthonormée $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de E telle que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:*

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k) \text{ et } (e_k|f_k) > 0.$$

PREUVE. On fait une récurrence sur la dimension de E . Si $\dim E = 1$, l'unique vecteur f_1 de la famille \mathcal{F} devant être de norme 1, on a forcément : $f_1 = \pm \frac{e_1}{\|e_1\|}$. Mais si on veut de plus $(e_1|f_1) > 0$, il reste une unique possibilité : $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

Supposons donc que le théorème soit vrai pour tout espace euclidien de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et soit E un espace de dimension n . Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit $G = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence il existe

une unique base orthonormale $\mathcal{F}' = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ de G telle que, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$:

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_k) \text{ et } (e_k|f_k) > 0.$$

Il faut donc montrer qu'il existe un unique vecteur $f_n \in E$ de norme 1 tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $(f_n|f_i) = 0$ et $(f_n|e_n) > 0$. On peut a priori poser $f_n = \lambda e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$. La condition $(f_n|f_i) = 0$ est équivalente à : pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\lambda(e_n|f_i) + \alpha_i = 0$. Donc $f_n = \lambda v$ avec $v = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} (e_n|f_i) f_i$. Comme $e_n \notin G$, le vecteur v est non nul. La condition $\|f_n\| = 1$ est vérifiée si et seulement si $\lambda = \pm \|v\|^{-1}$. Enfin comme $(f_n|e_n) = \lambda(f_n|v) = \lambda(v|v)$, le produit $(f_n|e_n)$ est strictement positif si et seulement si $\lambda = \|v\|^{-1}$. \square

REMARQUE 3.2. A partir de la preuve du théorème précédent, on peut aisément en déduire un procédé inductif de construction d'une base orthonormée de E à partir d'une base quelconque. C'est le *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*. Ce procédé sera utilisé en TD.

2.3. Orthogonalité, somme directe, théorème de Pythagore. Nous allons d'abord énoncer le théorème de Pythagore.

THÉORÈME 3.10. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, alors pour tout $(v, w) \in E^2$, on a $(v|w) = 0$ si et seulement si $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.*

PREUVE. Il suffit de calculer : $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(v|w)$. Cette égalité montre immédiatement l'équivalence du théorème. \square

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace E muni d'une forme bilinéaire symétrique quelconque ϕ , alors F n'est pas forcément en somme directe avec $F^{\perp\phi}$. Par contre dans un espace euclidien, cette égalité est vérifiée. Dans un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ l'orthogonal de F par rapport au produit scalaire sera noté F^\perp .

PROPOSITION 3.11. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et F un sous-espace de E , alors on égalité : $E = F \oplus F^\perp$.*

PREUVE. Comme le produit scalaire est une forme définie positive, il n'y a pas de vecteurs isotropes non nuls et donc F est non isotrope, ce qui implique l'égalité de la proposition. \square

Cette décomposition en somme directe permet de définir deux transformations particulières d'un espace euclidien : les symétries orthogonales et les projections orthogonales.

DÉFINITION 3.5. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et F un sous-espace de E . Tout vecteur u de E s'écrit alors de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$.

- (i) La projection orthogonale de E sur F est l'application p défini par $p(u) = p(v + w) = v$.
- (ii) La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application s défini par $s(u) = s(v + w) = v - w$. Une symétrie par rapport à un sous-espace F de codimension un de E s'appelle une réflexion.

REMARQUE 3.3. (i) L'année dernière, pour toute décomposition $E = F \oplus G$, on a défini les projections de E sur F parallèlement à G , ainsi que les symétries par

rapport F parallèlement à G . Ici nous sommes dans le cas particulier où $G = F^\perp$. Comme les projections et symétries générales sont des applications linéaires, il en est de même des projections et symétries orthogonales.

- (ii) Si p est une projection orthogonale et s une symétrie orthogonale, on a les relations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{Id}_E$.
- (iii) Si p est une projection orthogonale et s une symétrie orthogonale par rapport au même sous-espace F , alors on a la relation $s + \text{Id}_E = 2p$.

Rappelons que si Y et Z sont deux parties d'un espace E muni d'une distance d , on définit la distance entre X et Y en posant : $d(X, Y) = \inf\{d(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$.

PROPOSITION 3.12. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F . On a alors l'égalité : pour tout $v \in E$, $d(v, F) = d(v, p(v))$.*

PREUVE. Soit $v \in E$ et $w \in F$. Par définition de p le vecteur $v - p(v)$ appartient à F^\perp , il est donc orthogonal à $w - p(v)$ qui est un vecteur de F . Le théorème de Pythagore donne donc l'égalité :

$$d(v, w)^2 = \|v - w\|^2 = \|v - p(v) - (w - p(v))\|^2 = \|v - p(v)\|^2 + \|w - p(v)\|^2.$$

Comme $\|w - p(v)\|^2$ est positif et nul si et seulement si $w = p(v)$ on en déduit immédiatement que $d(v, w)^2 \geq \|v - p(v)\|^2 = d(v - p(v))^2$, avec égalité si et seulement si $w = p(v)$. Ce qui conclut la preuve. \square

REMARQUE 3.4. Le résultat ci-dessus est un résultat d'optimisation : le point $p(v)$ réalise la distance minimum entre v et le sous-espace F . Nous verrons dans la dernière partie une version en dimension infinie qui a des conséquences en analyse.

3. Le groupe orthogonal

Une isométrie est une application linéaire qui préserve la norme :

DÉFINITION 3.6. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien ; une application linéaire g de E dans E telle que pour tout $v \in E$, $\|g(v)\| = \|v\|$ est une isométrie. L'ensemble des isométries de E sera noté $O(E)$.

REMARQUE 3.5. (i) On vérifiera en TD qu'une symétrie orthogonale est une isométrie.

- (ii) Sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard (voir l'exemple 3.1), l'application linéaire de matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est une isométrie. C'est la rotation d'angle θ .

On aurait pu définir les isométries comme les applications linéaires préservant le produit scalaire. En effet on a la proposition :

PROPOSITION 3.13. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et g une application linéaire de E dans E , alors g est une isométrie si et seulement si pour tout $(v, w) \in E^2$, $(g(v)|g(w)) = (v|w)$.*

PREUVE. Si g est une isométrie, alors on utilise la formule de polarisation (voir 5.1) pour calculer :

$$(g(v)|g(w)) = \frac{1}{2} [q(g(v) + g(w)) - q(g(v)) - q(g(w))],$$

où $q(v) = \|v\|^2$ désigne la forme quadratique associée au produit scalaire.

Comme g est linéaire on a : $q(g(v) + g(w)) = q(g(v + w))$. Par hypothèse, pour tout vecteur u de E on a $q(g(u)) = q(u)$, on en déduit :

$$\frac{1}{2} [q(g(v + w)) - q(g(v)) - q(g(w))] = \frac{1}{2} [q(v + w) - q(v) - q(w)] = (v|w).$$

□

La propriété d'être une isométrie se comporte bien par rapport à la composition des applications et au passage à l'inverse.

PROPOSITION 3.14. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien ;*

- (i) *Si g est une isométrie de E , alors g est bijective et g^{-1} est également une isométrie.*
- (ii) *Si g et h sont deux isométries de E , alors $g \circ h$ est également une isométrie.*

PREUVE. Pour le premier point : si $v \in E$ appartient au noyau de g , alors on a $\|g(v)\| = \|0\| = 0$ et donc $v = 0$ et g est bijective puisque E est de dimension finie. L'application inverse g^{-1} est linéaire, de plus si $g^{-1}(w) = v$ alors $g(v) = w$ et donc $\|v\| = \|g(v)\|$ ce qui est équivalent à $\|g^{-1}(w)\| = \|w\|$.

La preuve du deuxième point est évidente. □

Rappelons que $GL(E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires bijectives de E dans E . Cet ensemble est un groupe pour la loi définie par la composition. La proposition ci-dessus implique que l'ensemble $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, c'est donc un groupe que l'on appelle le groupe orthogonal de E .

Rappelons que si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et si g est une application linéaire bijective alors $g(\mathcal{B}) := (g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n))$ est encore une base de E . On dit que les éléments $g \in GL(E)$ envoient la base \mathcal{B} sur la base $g(\mathcal{B})$. Les isométries vérifient la même propriété pour les bases orthonormées.

PROPOSITION 3.15. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, et g une application linéaire de E dans E . On a équivalence entre :*

- (i) *l'application g est une isométrie ;*
- (ii) *pour toute base orthonormée \mathcal{B} , l'image $g(\mathcal{B})$ est une base orthonormée ;*
- (iii) *il existe une base orthonormée \mathcal{B} telle que $g(\mathcal{B})$ soit orthonormée.*

PREUVE. On a vu que si g est une isométrie, alors pour tout v, w , on a $(g(v)|g(w)) = (v|w)$. On en déduit immédiatement l'implication (i) \Rightarrow (ii).

L'implication (ii) \Rightarrow (iii) étant évidente, il reste à montrer (iii) \Rightarrow (i). Soit $v \in E$ et $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$ la décomposition de v dans la base orthogonale \mathcal{B} . Comme g est linéaire, on a : $g(v) = v_1 g(e_1) + v_2 g(e_2) + \dots + v_n g(e_n)$. Les bases (e_1, e_2, \dots, e_n) et $(g(e_1), g(e_2), \dots, g(e_n))$ étant orthonormées, on a $\|v\|^2 = \|g(v)\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$. □

Les matrices d'un élément de $O(E)$ dans une base orthonormée peuvent se caractériser facilement :

COROLLAIRE 3.1. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien de dimension n , \mathcal{B} une base orthonormée, g une application linéaire et A la matrice de g dans \mathcal{B} . Alors on a équivalence entre :

- (i) l'application linéaire g est une isométrie ;
- (ii) les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée pour le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n ;
- (iii) la matrice A vérifie ${}^tA.A = \text{Id}_E$;
- (iv) les vecteurs lignes de A forment une base orthonormée pour le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n .

PREUVE.

- (i) \Leftrightarrow (ii) Rappelons que g une isométrie si et seulement si l'image de \mathcal{B} est une base orthonormée. Or les coordonnées dans \mathcal{B} des vecteurs (e_1, e_2, \dots, e_n) sont les colonnes de A , ce qui montre l'équivalence.
- (ii) \Rightarrow (iii) Par définition du produit matriciel, le coefficient à la ligne i et à la colonne j de ${}^tA.A$ est égal au produit scalaire de la i -ème colonne de A avec la j -ième colonne de A . L'identité ${}^tA.A = \text{Id}_E$ découle donc directement du fait que les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée.
- (iii) \Rightarrow (iv) Si A vérifient ${}^tA.A = \text{Id}_E$, alors grâce à la propriété de la transposition, on a également $A{}^tA = \text{Id}_E$. Le coefficient à la i -ième ligne et j -ième colonne de $A{}^tA$ est égal au produit scalaire de la i -ième ligne de A avec la j -ième ligne de A ce qui permet de conclure.
- (iv) \Rightarrow (ii) Si les vecteurs lignes forment une base orthonormée, alors on a $A{}^tA = \text{Id}_E$ et donc ${}^tAA = \text{Id}_E$. Les vecteurs colonnes de A forment donc une base orthonormée. □

4. Dual d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. On a vu précédemment (voir la définition 2.3 qu'une forme bilinéaire symétrique permet de définir une application :

$$\begin{aligned} I : E &\rightarrow E^* \\ v &\mapsto (w \mapsto (v|w)). \end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est non dégénéré, cette application est injective et donc bijective. L'application I est donc un isomorphisme. Cet isomorphisme dépend de la structure euclidienne sur E . Mais en tant qu'isomorphisme d'espace euclidien, l'isomorphisme I est naturel.

Comme I est bijective, pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $w \in E$, $\varphi(w) = (v|w)$. On dit que v représente la forme φ . Par définition si v représente φ alors $\ker \varphi = v^\perp$.

L'isomorphisme I permet de définir l'adjoint d'un morphisme.

DÉFINITION 3.7. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$, l'adjoint de f est l'application f^* défini par $f^* = I^{-1} \circ {}^t f \circ I$.

Voici une propriété fondamentale de l'adjoint :

PROPOSITION 3.16. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien; soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f^* est l'unique application linéaire de E dans E telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, on a : $(v|f(w)) = (f^*(v)|w)$.

PREUVE. Par définition on a : $(f^*(v)|w) = (I^{-1} \circ {}^t f \circ I(v)|w)$. Par définition de I , pour tout $\varphi \in E^*$ et pour tout $w \in E$, on a : $(I^{-1}(\varphi)|w) = \varphi(w)$. On en déduit donc que : $(I^{-1} \circ {}^t f \circ I(v)|w) = ({}^t f \circ I)(v)(w)$. On conclut en remarquant que : $({}^t f \circ I)(v)(w) = I(v)(f(w)) = (v|f(w))$, par définition de la transposée et de I . La preuve de l'unicité de l'application f^* est laissée en exercice. \square

REMARQUE 3.6. On trouvera dans la feuille d'exercice 2 une définition alternative de l'adjoint dans le cadre plus général d'un espace E muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

L'adjoint d'un morphisme est défini par l'intermédiaire de la transposée (et de l'isomorphisme I pour obtenir une application de E dans E). L'opération "adjoint" vérifie les mêmes propriétés que la transposée :

PROPOSITION 3.17. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, on a les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f^* est linéaire ;
- (ii) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^{**} = f$;
- (iii) pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;
- (iv) L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par $f \mapsto f^*$ est linéaire ;
- (v) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a : $\ker f^* = \text{Im } f^\perp$ et $\text{Im } f^* = \ker f^\perp$;
- (vi) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si \mathcal{B} est une base orthonormée, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f^* = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

PREUVE. La preuve est laissée en exercice; on pourra s'inspirer de la preuve des propriétés équivalentes pour la transposition (proposition 1.3), ou bien de l'exercice de la feuille de TD 2. \square

4.1. Endomorphismes symétriques.

DÉFINITION 3.8. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on dit que f est auto-adjoint ou symétrique si $f^* = f$. On notera $\mathcal{L}^s(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

REMARQUE 3.7. (i) La notion de symétrie dépend de la structure d'espace euclidien.

(ii) On ne confondra pas les deux propriétés : f est symétrique et f est une isométrie ! L'application f est symétrique si $f^* = f$ et f est une isométrie si $f^* = f^{-1}$

(iii) Si \mathcal{B} est une base orthonormée, on a vu 3.17 que la matrice de f^* dans \mathcal{B} est la transposée de la matrice de f dans \mathcal{B} ; on en déduit que f est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée \mathcal{B} est symétrique.

(iv) L'ensemble $\mathcal{L}^s(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. La remarque ci-dessus montre que si $\dim E = n$, alors $\dim \mathcal{L}^s(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de cette partie.

THÉORÈME 3.18. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.*

La preuve de ce théorème se fera à la fin de cette partie, une fois établi plusieurs lemmes préliminaires.

Avant cela, nous pouvons énoncer la version matricielle du théorème.

COROLLAIRE 3.2. *Soit A une matrice carrée réelle de taille n symétrique, alors A est diagonalisable, dans une base orthonormée pour le produit scalaire standard de \mathbb{R}^n .*

PREUVE. Soit \mathcal{B} la base standard de \mathbb{R}^n ; cette base est orthonormée pour le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n (voir 3.1). La matrice A définit un endomorphisme de \mathbb{R}^n , et comme A est symétrique, cet endomorphisme est auto-adjoint relativement au produit scalaire standard. On applique le théorème 3.18 pour conclure. \square

Pour la preuve du premier lemme, nous utiliserons la notation suivante : si M est une matrice à coefficients complexes, nous noterons \overline{M} la matrice obtenue en conjuguant les coefficients de M . Les propriétés suivantes nous seront utiles : pour toutes matrices M, N à coefficients complexes, on a :

- (i) $\overline{M N} = \overline{M} \overline{N}$;
- (ii) ${}^t \overline{M} = \overline{{}^t M}$;
- (iii) M est à coefficients réels si et seulement si $\overline{M} = M$.

LEMME 3.19. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application auto-adjointe. Alors toutes les valeurs propres de f sont réelles.*

PREUVE.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f , nous allons montrer que λ est réelle. Pour cela nous fixons une base orthonormée \mathcal{B} ; soit A la matrice (symétrique) de f dans la base \mathcal{B} . Comme λ est une valeur propre, il existe un vecteur colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$.

Nous allons calculer ${}^t \overline{X} A X$ de deux façons. D'une part, nous avons : ${}^t \overline{X} A X = \lambda {}^t \overline{X} X$. D'autre part comme A est symétrique et réelle, on a :

$${}^t \overline{X} A X = {}^t X A \overline{X} = {}^t X \overline{A \overline{X}} = \overline{{}^t X \overline{X}}.$$

Mais si les coefficients du vecteur colonne X sont x_1, x_2, \dots, x_n , on a :

$${}^t \overline{X} X = {}^t X \overline{X} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Comme X est non nul, $\sum_{i=1}^n |x_i|^2$ est non nul et donc $\lambda = \overline{\lambda}$ ce qui montre que λ est réel. \square

LEMME 3.20. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint ; soit λ_1, λ_2 deux valeurs propres réelles distinctes de f et E_1, E_2 les espaces propres associés ; alors E_1 est orthogonal à E_2 .*

PREUVE. Soit $v \in E_1$ et $w \in E_2$; calculons :

$$\lambda_1 (v|w) = (\lambda_1 v|w) = (f(v)|w) = (v|f(w)) = \lambda_2 (v|w).$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on en déduit que $(v|w) = 0$. \square

LEMME 3.21. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application auto-adjointe ; soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f , alors F^\perp est stable par f .*

PREUVE. Soit $w \in F^\perp$, il faut montrer que $f(w) \in F^\perp$, c'est à dire que pour tout $v \in F$, $(v|f(w)) = 0$. Pour cela, remarquons que pour tout $v \in F$, $(v|f(w)) = (f(v)|w)$. Ce dernier produit vaut zéro puisque $f(v) \in F$. \square

4.2. preuve du théorème. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de f . D'après le lemme 3.19, ces p valeurs propres sont réelles. Soit E_1, E_2, \dots, E_p les sous-espaces propres associés. Le sous-espace $F = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$ est stable par f . La restriction $f|_F$ est diagonalisable et comme d'après le lemme 3.20 les espaces E_i sont orthogonaux deux à deux, la diagonalisation peut se faire en base orthonormée.

Nous allons montrer que $F = E$ ce qui conclut la preuve. D'après le lemme 3.21, f laisse stable F^\perp . Si F^\perp est différent de 0, alors la restriction $f|_{F^\perp}$ admet une valeur propre λ de sous-espace propre associé E_λ . Mais alors il existe $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\lambda = \lambda_i$, et donc $E = E_i \subset F \cap F^\perp$ ce qui est absurde et donc $F^\perp = 0$ et $F = E$.

5. Endomorphismes symétriques et formes bilinéaires

DÉFINITION 3.9. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit une application ϕ_f de $E \times E$ dans \mathbb{R} en posant pour tout $(v, w) \in E^2$: $\phi_f(v, w) = (f(v)|w)$.

PROPOSITION 3.22. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique (i.e. $f \in \mathcal{L}^s(E)$). Alors ϕ_f est une forme bilinéaire symétrique.*

De plus $\ker \phi_f = \ker f$ et si \mathcal{B} est une base orthonormée, $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \phi_f = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.

PREUVE. Cette preuve est laissée en exercice. \square

DÉFINITION 3.10. Si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien et si $f \in \mathcal{L}^s(E)$, on dira que f est positive (resp. définie positive) si la forme quadratique associée à ϕ_f est positive (resp. définie positive).

PROPOSITION 3.23. *L'application θ de $\mathcal{L}^s(E)$ dans l'espace $\text{Sym}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E définie par $\theta(f) = \phi_f$ est une bijection. Par conséquent pour toute forme bilinéaire symétrique ϕ , il existe une unique $f \in \mathcal{L}^s(E)$ telle que $\phi = \phi_f$.*

PREUVE. L'application θ est injective. Comme les deux espaces $\mathcal{L}^s(E)$ et $\text{Sym}(E)$ sont de même dimension, θ est bijective. \square

Nous finissons cette partie par le théorème de diagonalisation simultanée de deux formes bilinéaires symétriques.

THÉORÈME 3.24. *Soit E un espace vectoriel réel, ϕ_1, ϕ_2 deux formes bilinéaires symétriques sur E . On supposera de plus que ϕ_1 est définie positive. Alors il existe une base \mathcal{B} de E orthonormée pour ϕ_1 et orthogonale pour ϕ_2 .*

PREUVE. La forme ϕ_1 est définie positive donc (E, ϕ_1) est un espace euclidien. D'après la proposition 3.23, il existe une unique $f \in \mathcal{L}^s(E)$ telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, $\phi_2(v, w) = \phi_1(f(v), w)$. D'après le théorème 3.18, f est diagonalisable dans une base \mathcal{B} orthonormée pour ϕ_1 . La matrice de ϕ_2 dans cette base est égale à la matrice de f dans cette base. C'est donc une matrice diagonale et donc \mathcal{B} est une base orthogonale pour ϕ_2 . \square

Formes hermitiennes, espaces prehilbertiens

Dans cette dernière partie, nous allons définir la notion équivalente à un produit scalaire pour les espaces vectoriels complexes. Auparavant, nous allons préciser les différentes relations entre les espaces vectoriels réels et complexes. Si z est un nombre complexe nous noterons $\Re(z)$ et $\Im(z)$ la partie réelle et la partie imaginaire de z .

1. Espaces vectoriels réels, espaces vectoriels complexes

1.1. Restriction des scalaires. On peut considérer le corps \mathbb{C} comme un espace vectoriel réel, il est alors isomorphe à \mathbb{R}^2 . Cela correspond à l'écriture unique de tout nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Plus généralement, comme le corps \mathbb{R} est un sous-corps de \mathbb{C} , tout espace vectoriel complexe est un espace vectoriel réel.

DÉFINITION 4.1. Soit E un espace vectoriel complexe, on note $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel *réel* obtenu par restriction des scalaires.

REMARQUE 4.1. Si E est un espace vectoriel complexe de dimension finie sur \mathbb{C} , alors $E_{\mathbb{R}}$ est également de dimension finie et on a :

$$2 \dim_{\mathbb{C}} E = \dim_{\mathbb{R}} E_{\mathbb{R}}.$$

En effet (v_1, v_2, \dots, v_n) est une base de E si et seulement si

$$(v_1, v_2, \dots, v_n, iv_1, iv_2, \dots, iv_n)$$

est une base de $E_{\mathbb{R}}$.

1.2. extension des scalaires. Si E est un espace vectoriel réel, on veut étendre les scalaires et associer à E un espace vectoriel complexe qui sera noté $E_{\mathbb{C}}$. Par exemple à $E = \mathbb{R}^n$ (resp. $M_n(\mathbb{R})$) on désire associer l'espace complexe $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$). Voici une définition formelle de $E_{\mathbb{C}}$:

DÉFINITION 4.2. Soit E un espace vectoriel *réel*, l'espace $E_{\mathbb{C}} = E \times E$ est un espace vectoriel complexe en posant pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et pour tout $(v, w) \in E \times E$:

$$(a + ib).(v, w) = (av - bw, bv + aw).$$

REMARQUE 4.2. (i) On vérifie que l'opération ci-dessus définit bien une structure d'espace vectoriel complexe. Pour se rappeler de cette loi et comprendre son origine, il faut "penser" $E_{\mathbb{C}}$ comme étant égal à $E \oplus iE$. D'ailleurs, une fois cet espace défini, il est facile de montrer que tout vecteur $v \in E_{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique $v = v_1 + iv_2$, avec $(v_1, v_2) \in E^2$.

(ii) Si \mathcal{B} est une base de E , alors \mathcal{B} est aussi une base de $E_{\mathbb{C}}$. On en déduit que si E est de dimension finie, alors $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}}$.

1.3. Formes réelles. Les deux opérations définies ci-dessus ne sont pas inverse l'une de l'autre : par exemple si E est l'espace complexe \mathbb{C} , alors on a vu que $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ est égal à \mathbb{R}^2 et donc $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à \mathbb{C}^2 .

Pour définir une opération inverse à l'extension des scalaires, nous allons introduire la notion de forme réelle.

DÉFINITION 4.3. Soit E un espace vectoriel complexe; une forme réelle sur E est un sous-espace vectoriel réel $F \subset E_{\mathbb{R}}$ tel que $F_{\mathbb{C}} = E$

REMARQUE 4.3. (i) Par définition, si F est une forme réelle et si E est de dimension finie, alors $\dim_{\mathbb{R}} F = \dim_{\mathbb{C}} E$.

(ii) Il n'y a pas unicité d'une forme réelle, par exemple toutes les espaces de dimension réelle 1 de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ sont des formes réelles.

(iii) Si F est une forme réelle, alors comme $E = F \oplus iF$, on peut définir une conjugaison sur E en posant $v + iw = v - iw$. Par définition :

$$F = \{u \in E \mid \bar{u} = u\}.$$

1.4. Applications semi-linéaires. Soit E et F deux espaces vectoriels complexes et f une application de E dans F \mathbb{R} -linéaire, c'est à dire linéaire comme application de $E_{\mathbb{R}}$ dans $F_{\mathbb{R}}$. On peut se demander si f est \mathbb{C} -linéaire, c'est à dire linéaire comme application entre espaces vectoriels complexes. Une telle application est bien évidemment additive : c'est à dire pour tout $(u, v) \in E^2$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Par contre, on n'a pas forcément, que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $v \in E$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Par exemple, l'application induite par la conjugaison de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est \mathbb{R} -linéaire, mais n'est pas \mathbb{C} -linéaire. Nous allons maintenant donner la définition d'application semi-linéaire, et le lecteur vérifiera que d'une part la conjugaison est une application semi-linéaire et que d'autre part toute application semi-linéaire est \mathbb{R} -linéaire, mais pas \mathbb{C} -linéaire.

DÉFINITION 4.4. Soient E et F deux espaces vectoriels complexes, et f une application de E dans F . On dit que f est semi-linéaire, si

(i) f est additive;

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $v \in E$, on a $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$.

La proposition qui suit nous sera utile pour la suite.

PROPOSITION 4.1. Soient E et F deux espaces vectoriels complexes, et f une application semi-linéaire de E dans F , alors le noyau de f (resp. l'image de f) est un sous-espace vectoriel de E (resp. de F).

PREUVE. Il suffit d'appliquer les définitions du noyau et de l'image de f . □

2. Formes sesqui-linéaires

Dans cette section, nous allons définir les objets qui vont généraliser les formes bilinéaires symétriques dans le cas des espaces vectoriels complexes. Le but final est de définir un produit qui généralise le produit scalaire dans le cas complexe. Commençons par une définition.

DÉFINITION 4.5. Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} et soit Ψ une application de $E \times E$ dans \mathbb{C} . On dit que Ψ est une forme sesqui-linéaire si :

- (i) pour tout $w \in E$, l'application $v \mapsto \Psi(v, w)$ est semi-linéaire ;
- (ii) pour tout $v \in E$, l'application $w \mapsto \Psi(v, w)$ est linéaire.

On dit que Ψ est hermitienne (ou que Ψ est à symétrie hermitienne) si pour tout $(v, w) \in E^2$, $\Psi(v, w) = \overline{\Psi(w, v)}$.

Nous noterons $\text{Herm}(E)$ l'ensemble des formes sesqui-linéaires hermitiennes. Cet ensemble n'est pas un espace vectoriel complexe. Le lecteur vérifiera, que $\text{Herm}(E)$ est stable par addition et stable par multiplication par un scalaire réel, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. *L'ensemble $\text{Herm}(E)$ est un espace vectoriel réel.*

Soit $\Psi \in \text{Herm}(E)$, comme Ψ est à valeur complexe, on peut séparer les parties réelles et imaginaires de Ψ et écrire, pour tout $(v, w) \in E^2$, $\Psi(v, w) = \Psi_s(v, w) + i\Psi_a(v, w)$ avec Ψ_s et Ψ_a , deux applications de $E \times E$ dans \mathbb{R} . On a le résultat suivant sur Ψ_s et Ψ_a :

PROPOSITION 4.3. *Soit $\Psi \in \text{Herm}(E)$, et Ψ_s et Ψ_a les parties réelles et imaginaires de Ψ , alors Ψ_s est une forme bilinéaire symétrique sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $E_{\mathbb{R}}$, et Ψ_a est une forme bilinéaire antisymétrique sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $E_{\mathbb{R}}$. De plus on a les relations suivantes : pour tout $(u, v) \in E^2$,*

$$\Psi_s(iu, iv) = \Psi_s(u, v) \text{ et } \Psi_a(iu, iv) = \Psi_a(u, v)$$

$$\Psi_s(iu, v) = \Psi_a(u, v) \text{ et } \Psi_a(iu, v) = -\Psi_s(u, v)$$

$$\Psi_s(u, iv) = -\Psi_a(u, v) \text{ et } \Psi_a(u, iv) = \Psi_s(u, v)$$

PREUVE. Comme Ψ est semi-linéaire, on a : $\Psi(iu, iv) = \bar{i}i\Psi(u, v) = \Psi(u, v)$ et donc :

$$\Psi_s(iu, iv) + i\Psi_a(iu, iv) = \Psi_s(u, v) + i\Psi_a(u, v)$$

ce qui montre les deux premières égalités. D'autre part $\Psi(iu, v) = -i\Psi(u, v) = -i\Psi_s(u, v) + \Psi_a(u, v)$ et donc en identifiant les parties réelles et imaginaires, on a $\Psi_s(iu, v) = \Psi_a(u, v)$ et $\Psi_a(iu, v) = -\Psi_s(u, v)$. Les deux dernières égalités peuvent s'obtenir en combinant les égalités précédentes. \square

REMARQUE 4.4. La théorie des formes sesqui-linéaires hermitiennes peut se voir comme une généralisation de la théorie des formes bilinéaires symétriques. En effet toute forme bilinéaire symétrique ϕ sur un espace vectoriel réel E peut s'étendre en une forme sesqui-linéaires hermitienne sur le complexifié $E_{\mathbb{C}}$. En effet, on a vu (voir remarque 4.2) que tout vecteur $u \in E_{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique : $u = u_1 + iu_2$ avec $(u_1, u_2) \in E^2$. On peut donc définir une application Ψ de $E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ dans \mathbb{C} en posant :

$$\Psi(u_1 + iu_2, v_1 + iv_2) = \phi(u_1, v_1) + \phi(u_2, v_2) + i(\phi(u_1, v_2) - \phi(u_2, v_1))$$

Le lecteur vérifiera que Ψ est une forme sesqui-linéaires hermitienne et que Ψ restreinte à l'espace $E \times E$ est égale à ϕ .

Ainsi, toutes les propriétés des formes bilinéaires symétriques vont se généraliser dans le cas des formes sesqui-linéaires hermitiennes. Par exemple, la symétrie d'une forme bilinéaire réelle se généralise en la symétrie hermitienne pour une forme sesqui-linéaire.

Comme dans le cas réel, on peut associer à une forme sesqui-linéaires hermitienne sur E , une application de E dans E^* .

DÉFINITION 4.6. Soit E un espace vectoriel complexe et soit $\Psi \in \text{Herm}(E)$, alors on définit une application I_Ψ de E dans E^* en posant pour tout $(u, v) \in E^2$, $I_\Psi(u)(v) = \Psi(u, v)$.

REMARQUE 4.5. Comme Ψ est sesqui-linéaires, l'application I_Ψ est une application *semi-linéaire*. On aurait pu poser $I_\Psi(u)(v) = \Psi(v, u)$, alors I_Ψ serait linéaire mais dans ce cas $I_\Psi(u)$ serait une forme *semi-linéaire*.

On peut définir le noyau et le rang d'une forme sesqui-linéaires hermitienne.

DÉFINITION 4.7. Soit E un espace vectoriel complexe et soit $\Psi \in \text{Herm}(E)$, on définit le noyau de Ψ et le rang de Ψ comme étant le noyau et le rang de l'application I_Ψ .

REMARQUE 4.6. Si on traduit la définition du noyau de I_Ψ , on obtient :

$$\ker \Psi = \{u \in E \mid \forall v \in E \Psi(u, v) = 0\}.$$

D'après la proposition 4.1 l'ensemble $\ker \Psi$ est un sous-espace vectoriel et en utilisant la symétrie hermitienne, on a également :

$$\ker \Psi = \{v \in E \mid \forall u \in E \Psi(u, v) = 0\}.$$

3. Matrices

Avant de définir la matrice d'une forme sesqui-linéaires hermitienne, nous allons donner deux définitions.

DÉFINITION 4.8. Soit A une matrice à coefficients complexe, on appelle la transconjuguée de A la matrice ${}^t\bar{A} = \bar{{}^tA}$.

On dit qu'une matrice A est hermitienne si on a l'égalité : ${}^t\bar{A} = A$.

REMARQUE 4.7. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice hermitienne, alors par définition, pour tout (i, j) , on a $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. On en déduit d'une part que les coefficients diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels et d'autre part que la dimension de l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes est égale à n^2 .

Définissons maintenant la matrice d'une forme sesqui-linéaires hermitienne.

DÉFINITION 4.9. Soit Ψ une forme sesqui-linéaires hermitienne sur E un espace vectoriel complexe et soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E . On définit la matrice de Ψ dans \mathcal{B} , la matrice carrée de taille n $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\Psi = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que

$$a_{ij} = \Psi(v_i, v_j).$$

Voici les propriétés de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\Psi$.

PROPOSITION 4.4. Soit Ψ une forme sesqui-linéaires hermitienne sur E et soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\Psi$ sa matrice dans une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. On a alors les propriétés suivantes :

- (i) la matrice A est une matrice hermitienne ;
- (ii) la matrice A est égale à la transposée de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}}I_\Psi$.
- (iii) Pour tout $(v, w) \in E^2$, on a l'égalité :

$$\Psi(v, w) = {}^t \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}}v} A \text{Mat}_{\mathcal{B}}w ;$$

- (iv) Si \mathcal{C} est une base de E , et si P est la matrice de passage : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}I_E$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}\Psi = {}^t \bar{P} \text{Mat}_{\mathcal{B}}\Psi P.$$

PREUVE. Puisque Ψ est à symétrie hermitienne, on a donc que : $\Psi(v_j, v_i) = \overline{\Psi(v_j, v_i)}$, le premier point s'en déduit directement.

Pour le point (ii) : par définition, le coefficient à la ligne i et à la colonne j de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} I_\Psi$ est égale à la coordonnées sur v_i^* de la forme linéaire $\Psi(v_j, \cdot)$, d'après la propriété de la base duale \mathcal{B}^* , il est donc égal à $\Psi(v_j, v_i)$ qui est bien le coefficient à la ligne i et à la colonne j de la *transposée* de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}} \Psi$.

Les points (iii) et (iv) se montrent par de simples calculs très similaires au cas des formes bilinéaires symétriques (voir la proposition 2.5). \square

On peut utiliser la proposition précédente pour calculer la dimension de l'espace vectoriel réel $\text{Herm}(\mathbb{E})$.

PROPOSITION 4.5. *Soit E un espace vectoriel, alors il existe une application linéaire bijective entre l'espace $\text{Herm}(\mathbb{E})$ et l'espace des matrices hermitiennes. On en déduit que si $\dim E = n$, alors la dimension sur \mathbb{R} de $\text{Herm}(\mathbb{E})$ est égale à n^2 .*

PREUVE. L'existence de l'isomorphisme est semblable au cas réel (voir la proposition 2.4). Et l'assertion sur la dimension découle de la remarque 4.7. \square

4. Formes quadratiques hermitiennes

Nous allons maintenant définir la notion de forme quadratique hermitienne. Remarquons d'abord que si Ψ est une forme sesqui-linéaires hermitienne, alors pour tout $v \in E$, $\Psi(v, v) = \overline{\Psi(v, v)}$ et donc $\Psi(v, v)$ est réel.

DÉFINITION 4.10. Soit E un espace vectoriel complexe et q une application de E dans \mathbb{R} , on dit que q est une forme quadratique hermitienne, s'il existe une forme sesqui-linéaires hermitienne Ψ telle que pour tout $v \in E$, $q(v) = \Psi(v, v)$.

Si q est une forme quadratique hermitienne, on peut retrouver la forme sesqui-linéaires hermitienne associée, grâce à la formule qui suit.

PROPOSITION 4.6. *Soit Ψ une forme sesqui-linéaires hermitienne sur une espace E , et q la forme quadratique hermitienne associée. Pour tout $(v, w) \in E^2$, on a alors :*

$$\begin{aligned} \Psi(v, w) &= \frac{1}{2} [q(v+w) - q(v) - q(w) - i(q(v+iw) - q(v) - q(iw))] \\ &= \frac{1}{4} [q(v+w) - q(v-w) - i(q(v+iw) - q(v-iw))]. \end{aligned}$$

PREUVE. Commençons par calculer $q(v+w)$.

$$\begin{aligned} q(v+w) &= \Psi(v+w, v+w) \\ &= q(v) + q(w) + \Psi(v, w) + \overline{\Psi(v, w)} \\ &= q(v) + q(w) + \Psi(v, w) + \overline{\Psi(v, w)}, \end{aligned}$$

mais comme pour tout nombre complexe on a : $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, on a donc l'égalité :

$$q(v+w) = q(v) + q(w) + 2\Re(\Psi(v, w)),$$

et donc

$$\Re(\Psi(v, w)) = \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w)).$$

On obtient la première égalité en utilisant l'identité $\Im(\Psi(v, w)) = -\Re(\Psi(v, iw))$ de la proposition 4.3.

Pour l'autre égalité, on sait que :

$$\Re(\Psi(v, w)) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w))$$

ce qui permet de conclure. \square

Les formules ci-dessus s'appellent formules de polarisation. De ces formules, on en déduit qu'il existe une unique forme sesqui-linéaire hermitienne associée à une forme quadratique q , on dit que Ψ est la forme polaire de q . On peut énoncer ce résultat d'unicité sous la forme suivante :

PROPOSITION 4.7. *Soit E un espace vectoriel complexe ; notons $\text{Qh}(E)$, l'ensemble des formes quadratiques hermitiennes ; l'ensemble $\text{Qh}(E)$ est un espace vectoriel réel et il existe un isomorphisme entre $\text{Qh}(E)$ et l'espace des formes sesqui-linéaires hermitiennes sur E .*

Grâce à ce résultat, on peut comme dans la partie précédente, associer chaque objet de $\text{Qh}(E)$ à Ψ peut être associé à sa forme quadratique q . On pourra parler de la matrice de q , du noyau de q ...

5. bases orthogonales, bases orthonormales

Tout comme dans le cas des formes bilinéaires (symétriques) on peut définir la notion de vecteurs orthogonaux, de bases orthogonales et orthonormales.

DÉFINITION 4.11. Soient E un espace vectoriel complexe, Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne de forme quadratique hermitienne associée q .

- (i) On dit que deux vecteurs v, w de E sont Ψ -orthogonaux si $\Psi(v, w) = 0$;
- (ii) On dit qu'un vecteur v est isotrope si $q(v) = 0$;
- (iii) On dit qu'une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E est orthogonale pour Ψ si pour tout i, j distincts $\Psi(v_i, v_j) = 0$.
- (iv) On dit qu'une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E est orthonormale pour Ψ si pour tout i, j $\Psi(v_i, v_j) = \delta_i^j$.

Dans ce contexte, il existe des bases orthogonales.

PROPOSITION 4.8. *Soit E un espace vectoriel complexe et Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne, alors il existe une base orthogonale pour Ψ .*

PREUVE. La preuve est très similaire à la preuve de la proposition similaire dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique (voir la proposition 2.10). On fait une récurrence sur la dimension de E . Si E est de dimension 1, il n'y a rien à montrer.

Supposons qu'il existe une base orthogonale pour tout espace de dimension $n-1$ et soit E un espace de dimension n . On peut supposer que la forme Ψ est non nulle puisque le résultat est évident dans ce cas. Soit q la forme quadratique q associée à Ψ . Il existe un vecteur $v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$, car sinon la forme quadratique q est nulle et la forme sesqui-linéaire Ψ également d'après la proposition 4.7. Soit $E' = v^\perp$, alors d'une part comme v n'est pas isotrope on a $E' \cap \mathbb{C}v = 0$ et d'autre part on a l'égalité $v^\perp = {}^\perp I_\Psi(v)$ (voir la preuve de la proposition 2.6), et donc $\dim E' = \dim E - 1$. On peut donc écrire la

somme directe $E = \mathbb{C}v \oplus E'$. On finit la preuve en appliquant l'hypothèse de récurrence à E' . \square

Soit E un espace vectoriel complexe et soit Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne sur E . On a vu dans la partie précédente qu'il existait une base orthogonale pour Ψ . Comme dans le cas des formes bilinéaires symétriques réelles, on peut obtenir un peu plus : il existe toujours une *base orthogonale réduite*.

DÉFINITION 4.12. Soit E un espace vectoriel, Ψ une forme bilinéaire hermitienne sur E et q sa forme quadratique hermitienne. Une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est dite orthogonale réduite si \mathcal{B} est orthogonale et si de plus pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $q(e_i) \in \{-1, 0, 1\}$.

PROPOSITION 4.9. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} et Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne sur E , alors il existe une base de E orthogonale réduite.

PREUVE. On sait déjà qu'il existe une base orthogonale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E . Il suffit de poser $e_i = \sqrt{|q(e'_i)|}^{-1} e'_i$ si $q(e'_i) \neq 0$ et $e_i = e'_i$ si $q(e'_i) = 0$ pour obtenir une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthogonale réduite. \square

Nous allons dans ce contexte définir la notion de signature d'une forme sesqui-linéaire hermitienne. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour une forme sesqui-linéaire hermitienne Ψ . posons $r_{\mathcal{B}} = \text{card}\{i \mid |q(e_i)| > 0\}$ et $s_{\mathcal{B}} = \text{card}\{i \mid |q(e_i)| < 0\}$. Remarquons que la somme $r_{\mathcal{B}} + s_{\mathcal{B}}$ n'est autre que le rang de Ψ . Cette somme est donc indépendante de la base \mathcal{B} . En fait, les deux nombres $r_{\mathcal{B}}$ et $s_{\mathcal{B}}$ sont indépendants de la base \mathcal{B} par le théorème suivant :

THÉORÈME 4.10. Théorème d'inertie de Sylvester

Soit E un espace vectoriel complexe et Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne sur E . Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthogonales, alors on a les égalités : $r_{\mathcal{B}} = r_{\mathcal{B}'}$ et $s_{\mathcal{B}} = s_{\mathcal{B}'}$.

PREUVE. La preuve est la même que la preuve du théorème similaire dans le cas réel (théorème 2.14). \square

DÉFINITION 4.13. On se place dans les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. On appelle *signature* de Ψ (ou de la forme quadratique associée q), le couple (r, s) tel que pour toute base orthogonale \mathcal{B} , $r = r_{\mathcal{B}}$ et $s = s_{\mathcal{B}}$.

Nous allons définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes sesqui-linéaires hermitiennes.

DÉFINITION 4.14. Soit E un espace vectoriel et soient Ψ, Ψ' deux formes sesqui-linéaires hermitiennes, on dit que $\Psi \sim \Psi'$ s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ bijective telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, on ait : $\Psi(v, w) = \Psi'(f(v), f(w))$.

PROPOSITION 4.11. La relation définie dans la proposition précédente est une relation d'équivalence.

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 2.15. \square

On va voir que deux formes sesqui-linéaires sont en relation si et seulement si elles ont même matrice dans deux bases de E .

PROPOSITION 4.12. *Soit E un espace vectoriel et Ψ, Ψ' deux formes bilinéaires sur E , alors $\Psi \sim \Psi'$ si et seulement s'il existe deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\Psi = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}\Psi'$.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 2.16 □

Nous allons voir que la signature permet de décider si deux formes sesqui-linéaires sont équivalentes ou pas. On a en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 4.13. *Soit E un espace vectoriel complexe et Ψ, Ψ' deux formes sesqui-linéaires hermitiennes, alors $\Psi \sim \Psi'$ si et seulement si Ψ et Ψ' ont même signature.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 2.17 □

6. Espaces hermitiens

Dans toute ce chapitre les espaces vectoriels seront complexes et de dimension finie.

6.1. Formes sesqui-linéaires hermitiennes positives et définies positives.

DÉFINITION 4.15. Soit E un espace vectoriel, Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne et q la forme quadratique hermitienne associée. On dit que q est positive si pour tout $v \in E$ $q(v) \geq 0$.

On dit que q est définie positive, si elle est positive et si de plus $q(v) = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Voici une caractérisation des formes quadratiques hermitiennes positives.

PROPOSITION 4.14. *Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E , alors q est positive si et seulement si sa signature est $(r, 0)$.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.1. □

Comme dans le cas réel, lorsque Ψ est positive, le noyau de Ψ et le cône isotrope de Ψ sont confondus.

PROPOSITION 4.15. *Soient E un espace vectoriel et Ψ une forme bilinéaire positive sur E . Notons \mathcal{C} , le cône isotrope de Ψ , on a égalité : $\mathcal{C} = \ker(\Psi)$.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.2. □

Nous allons maintenant caractériser les formes quadratiques hermitiennes définies positives.

PROPOSITION 4.16. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique hermitienne sur E . On a équivalence entre :*

- (i) q est définie positive ;
- (ii) q est de signature $(n, 0)$;
- (iii) q est positive et non dégénérée ;
- (iv) q est positive et sans vecteurs isotropes non nuls.

PREUVE. Voir la preuve 3.3 □

6.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Dans le contexte des formes sesqui-linéaires hermitiennes (définies) positives, nous avons également l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

THÉORÈME 4.17. *Soit Ψ une forme sesqui-linéaire hermitienne positive, alors on a :*

- (i) *Pour tout $(v, w) \in E^2$, $|\Psi(v, w)|^2 \leq q(v)q(w)$.*
- (ii) *Si de plus Ψ est définie positive, alors $|\Psi(v, w)|^2 = q(v)q(w)$ si et seulement si v et w sont colinéaires.*

PREUVE.

On doit adapter la preuve de du théorème 3.4. Si $q(v) = 0$, alors d'après la proposition 4.15, $\Psi(v, w)$ est nul également et donc l'inégalité est vérifiée. On est même toujours dans le cas d'égalité. Mais si q est définie positive, alors $v = 0$ et v et w sont toujours colinéaires. On a donc montré (i) et (ii) dans le cas où $q(v) = 0$.

Supposons maintenant que $q(v) \neq 0$. Comme q est positive, pour tout $(v, w) \in E^2$, $q(\lambda v + w) \geq 0$. Calculons $q(\lambda v + w)$:

$$q(\lambda v + w) = |\lambda|^2 q(v) + 2\Re(\bar{\lambda}\Psi(v, w)) + q(w).$$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi(v, w) = |\Psi(v, w)|e^{i\theta}$. Pour $\lambda = re^{i\theta}$, l'expression $P(\lambda) = r^2 + 2r|\Psi(v, w)| + q(w)$ est un polynôme à coefficients réels de degré 2 en r et positif. On finit la preuve comme dans le cas réel : son discriminant réduit est négatif ou nul, ce qui nous donne : $|\Psi(v, w)|^2 - q(v)q(w) \leq 0$, et on a montré le point (i).

Montrons le point (ii). Supposons donc que $|\Psi(v, w)|^2 = q(v)q(w)$, alors le discriminant du polynôme $r^2 + 2r|\Psi(v, w)| + q(w)$ est nul, il admet donc une racine double r_0 . On en déduit $q(r_0 e^{-i\theta} v + w) = 0$ et comme q est définie positive, on a $r_0 e^{-i\theta} v + w = 0$ et v et w sont proportionnels. La réciproque étant évidente, la preuve du théorème est complète. \square

7. Espaces hermitiens ; premières propriétés

Nous allons maintenant définir la notion d'espace hermitien.

DÉFINITION 4.16. Un espace hermitien est la donnée d'un couple (E, Ψ) , où E est un espace vectoriel complexe de dimension finie et Ψ est une forme sesqui-linéaire hermitienne définie positive sur E .

Une forme sesqui-linéaire hermitienne définie positive est appelée un produit scalaire *hermitien*. Nous utiliserons la même notation que pour le produit scalaire réel : $\Psi(v, w) = (v|w)$.

EXEMPLE 4.1. (i) Soit $E = \mathbb{C}^n$, alors la forme sesqui-linéaire : $(v|w) = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i$ est définie positive. L'espace $(\mathbb{C}^n, (.|.))$ est donc un espace hermitien. Il est facile de vérifier que la base canonique de \mathbb{C}^n est orthonormée pour ce produit. Ce produit scalaire hermitien est appelé le produit scalaire hermitien standard sur \mathbb{C}^n .

(ii) Soit $E = \mathbb{C}[X]_n$ l'espace des polynômes de degré au plus n ; la forme bilinéaire définie par :

$$(P|Q) = \int_0^1 \overline{P(t)} Q(t) dt$$

est un produit scalaire.

REMARQUE 4.8. Les espaces hermitiens sont des généralisations des espaces euclidiens. En effet, on a vu à la remarque 4.4, que si ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel E , alors ϕ s'étend sur le complexifié $E_{\mathbb{C}}$ en une forme Ψ sesquilinéaire hermitienne. Il est facile de vérifier que si la forme quadratique associée à ϕ est définie positive, alors il en est de même de la forme quadratique hermitienne associée à Ψ .

7.1. Norme induite.

NOTATION 4.1. Puisque q est positive, pour tout $v \in E$, $q(v) \geq 0$, on peut donc définir $\|v\| = \sqrt{q(v)}$.

Nous allons voir qu'un espace hermitien est normé :

PROPOSITION 4.18. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien alors l'application $\|v\| = \sqrt{(v|v)}$ définit une norme sur E .*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.5 □

On peut s'intéresser au cas d'égalité.

PROPOSITION 4.19. *Pour tout $(v, w) \in E^2$, $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ si et seulement si v et w sont positivement proportionnels.*

PREUVE. Si $w = 0$, alors l'équivalence est immédiate. Supposons donc que $w \neq 0$. Si v et w sont positivement proportionnels, alors un simple calcul montre que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$. Réciproquement si on suppose que $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$, on en déduit : $\Psi(v, w) = \|v\| \|w\|$. D'après le cas d'égalité du théorème 4.17 $v = \lambda w$. Mais alors $\|\lambda w + w\| = |1 + \lambda| \|w\|$ alors que $\|\lambda w\| + \|w\| = (|\lambda| + 1) \|w\|$ et donc $|1 + \lambda| = |\lambda| + 1$. On écrit alors $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ et on montre que $\theta = 0$ et donc λ est un réel positif. □

7.2. Bases orthonormées et coordonnées. Si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace hermitien, alors il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E . Dans une telle base, les coordonnées d'un vecteur et les coefficients de la matrice d'une application linéaire s'expriment simplement :

PROPOSITION 4.20. *Soit $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E et f une application linéaire, alors*

$$v = \sum_{i=1}^n (v_i|v) v_i$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = ((v_i|f(v_j)))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.8. □

7.3. Orthogonalité, somme directe, théorème de Pythagore. Nous allons d'abord énoncer le théorème de Pythagore.

THÉORÈME 4.21. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien, alors pour tout $(v, w) \in E^2$, si $(v|w) = 0$, alors $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.*

PREUVE.

Il suffit de calculer : $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\Re((v|w))$. Si v et w sont orthogonaux alors $\Re((v|w)) = 0$ ce qui montre l'égalité $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$. \square

REMARQUE 4.9. La réciproque du théorème de Pythagore est fautive dans le cadre hermitien. Si $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$, on en déduit que $\Re((v|w)) = 0$, ce qui n'implique pas forcément que $(v|w) = 0$. Par exemple si v est non nul et si $w = iv$ alors on a $\Re((v|w)) = 0$ (et donc $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$), mais $(v|iv) = i(v|v) \neq 0$.

Dans un espace hermitien $(E, (\cdot|\cdot))$ l'orthogonal de F par rapport au produit scalaire sera noté F^\perp . Tout comme dans le cas réel, tout sous-espace est en somme directe avec son orthogonal.

PROPOSITION 4.22. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien et F un sous-espace de E , alors on a l'égalité : $E = F \oplus F^\perp$.

PREUVE. Comme le produit scalaire est une forme définie positive, il n'y a pas de vecteurs isotropes non nuls et donc $F \cap F^\perp = 0$, de plus grâce à l'identification $F^\perp = {}^\perp I_\Psi(F)$, on a $\dim F^\perp = \text{codim } F$ ce qui implique la proposition. \square

Cette décomposition en somme directe permet de définir deux transformations d'un espace hermitien : les symétries orthogonales et les projections orthogonales.

DÉFINITION 4.17. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien et F un sous-espace de E . Tout vecteur u de E s'écrit alors de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$.

- (i) La projection orthogonale de E sur F est l'application p définie par $p(u) = p(v + w) = v$.
- (ii) La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application s définie par $s(u) = s(v + w) = v - w$. Une symétrie par rapport à un sous-espace F de codimension un de E s'appelle une réflexion.

Tout comme dans le cas réel, la projection permet de réaliser la distance minimale entre un point et un sous-espace.

PROPOSITION 4.23. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien, F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F . On a alors l'égalité : pour tout $v \in E$, $d(v, F) = d(v, p(v))$.

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.12 dans le cas réel. \square

8. Le groupe unitaire

Un morphisme unitaire est une application linéaire qui préserve la norme :

DÉFINITION 4.18. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien ; une application linéaire g de E dans E telle que pour tout $v \in E$, $\|g(v)\| = \|v\|$ est un morphisme unitaire. L'ensemble des morphismes unitaires de E sera noté $U(E)$.

On aurait pu définir les morphismes unitaires comme les applications linéaires préservant le produit scalaire hermitien. En effet on a la proposition :

PROPOSITION 4.24. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien et g une application linéaire de E dans E , alors g est un morphisme unitaire si et seulement si pour tout $(v, w) \in E^2$, $(g(v)|g(w)) = (v|w)$.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.13. □

La propriété d'être un morphisme unitaire se comporte bien par rapport à la composition des applications et au passage à l'inverse.

PROPOSITION 4.25. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien ;*

- (i) *Si g est un morphisme unitaire de E , alors g est bijective et g^{-1} est également un morphisme unitaire.*
- (ii) *Si g et h sont deux morphismes unitaires, alors $g \circ h$ est également un morphisme unitaire.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.14. □

Rappelons que $GL(E)$ désigne l'ensemble des applications linéaires bijectives de E dans E . Cet ensemble est un groupe pour la loi définie par la composition. La proposition ci-dessus implique que l'ensemble $U(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, c'est donc un groupe que l'on appelle le groupe unitaire de E .

On peut caractériser les endomorphismes unitaires par leur action sur une base orthogonale.

PROPOSITION 4.26. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien, et g une application linéaire de E dans E . On a équivalence entre :*

- (i) *l'application g est un morphisme unitaire ;*
- (ii) *pour toute base orthonormée \mathcal{B} , l'image $g(\mathcal{B})$ est une base orthonormée ;*
- (iii) *il existe une base orthonormée \mathcal{B} telle que $g(\mathcal{B})$ soit orthonormée.*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.15. □

Les matrices d'un élément de $U(E)$ dans une base orthonormée peuvent se caractériser facilement :

COROLLAIRE 4.1. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien de dimension n , \mathcal{B} une base orthonormée, g une application linéaire et A la matrice de g dans \mathcal{B} . Alors on a équivalence entre :*

- (i) *l'application linéaire g est un morphisme unitaire ;*
- (ii) *les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien standard sur \mathbb{C}^n ;*
- (iii) *la matrice A vérifie ${}^t\bar{A}.A = \text{Id}_E$;*
- (iv) *les vecteurs lignes de A forment une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien standard sur \mathbb{C}^n .*

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.1. □

9. Dual d'un espace hermitien, adjoint d'un endomorphisme

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien. Rappelons que l'on a défini une application semi-linéaire :

$$\begin{aligned} I : E &\rightarrow E^* \\ v &\mapsto (w \mapsto (v|w)). \end{aligned}$$

Comme le produit scalaire est non dégénéré, cette application est injective et donc bijective. L'application I est donc un isomorphisme. Cet isomorphisme dépend de la structure hermitienne sur E . Mais en tant qu'isomorphisme d'espace hermitien, l'isomorphisme I est naturel.

Comme I est bijective, pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $w \in E$, $\varphi(w) = (v|w)$. On dit que v représente la forme φ . Par définition si v représente φ alors $\ker \varphi = v^\perp$.

L'isomorphisme I permet de définir l'adjoint d'un morphisme.

DÉFINITION 4.19. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$, l'adjoint de f est l'application f^* défini par $f^* = I^{-1} \circ {}^t f \circ I$.

Voici une propriété fondamentale de l'adjoint :

PROPOSITION 4.27. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien ; soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f^* est l'unique application linéaire de E dans E telle que pour tout $(v, w) \in E^2$, on a : $(v|f(w)) = (f^*(v)|w)$.

PREUVE. Voir la preuve de la proposition 3.16. □

L'adjoint d'un morphisme est défini par l'intermédiaire de la transposée (et de l'isomorphisme I pour obtenir une application de E dans E). L'opération "adjoint" vérifie les mêmes propriétés que la transposée :

PROPOSITION 4.28. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien, on a les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, f^* est linéaire ;
- (ii) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $f^{**} = f$;
- (iii) pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;
- (iv) L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par $f \mapsto f^*$ est semi-linéaire ;
- (v) pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a : $\ker f^* = \text{Im } f^\perp$ et $\text{Im } f^* = \ker f^\perp$;
- (vi) Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si \mathcal{B} est une base orthonormée, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f^* = {}^t \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}} f}.$$

PREUVE. La preuve est encore une fois très semblable à la preuve de la proposition similaire dans le cas réel (proposition 3.17). Il y a une différence notable : l'application $f \mapsto f^*$ est *semi*-linéaire. Cette différence provient du fait que l'application I est elle même semi-linéaire. Par contre l'application f^* est linéaire puisque $f^* = I^{-1} \circ {}^t f \circ I$ et la composée de deux applications semi-linéaires est une application linéaire. □

9.1. Endomorphismes auto-adjoints.

DÉFINITION 4.20. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on dit que f est auto-adjoint si $f^* = f$. On notera $\mathcal{L}^s(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints de E .

- REMARQUE 4.10. (i) On ne confondra pas les deux propriétés : f est auto-adjoint et f est un morphisme unitaire ! L'application f est auto adjoint si $f^* = f$ et f est un morphisme unitaire si $f^* = f^{-1}$
- (ii) Si \mathcal{B} est une base orthonormée, on a vu 4.28 que la matrice de f^* dans \mathcal{B} est la transconjuguée de la matrice de f dans \mathcal{B} ; on en déduit que f est auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée \mathcal{B} est égale à sa transconjuguée.
- (iii) L'ensemble $\mathcal{L}^s(E)$ est un sous-espace vectoriel *réel* de $\mathcal{L}(E)$. La remarque ci-dessus montre que si $\dim E = n$, alors $\mathcal{L}^s(E)$ est de dimension réelle n^2 .

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de cette partie.

THÉORÈME 4.29. *Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace hermitien; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.*

La preuve de ce théorème se déduit facilement de la preuve du théorème similaire dans le cas réel, soit le théorème 3.18.

On a également une version matricielle :

COROLLAIRE 4.2. *Soit A une matrice carrée à coefficients complexe de taille n égale à sa transconjuguée, alors A est diagonalisable, dans une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien standard de \mathbb{C}^n .*